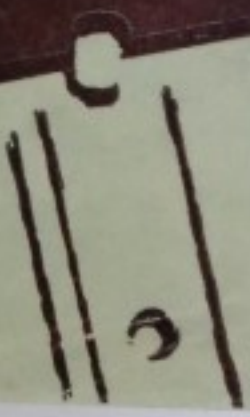
Culegere de probleme

PENTRU

EXAMENELE DE ADMITERE



EDITURA TEHNICA

CULEGERE DE PROBLEME
PENTRU
EXAMENELE DE ADMITERE

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU,
ALGEBRĂ ELEMENTARĂ, ALGEBRĂ SUPERIOARĂ,
TRIGONOMETRIE, GEOMETRIE ANALITICĂ.

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI, 1958

I

GEOMETRIE PLANĂ

I.1 *Printr-un punct dat M, situat pe o latură a unui triunghi ABC, să se ducă o dreaptă Δ care să împartă suprafața triunghiului în două părți egale.*

Soluție. Fie punctul M dat pe latura BC, astfel încît $BM < MC$; luăm pe această latură punctul D astfel ca $MC = MD$, unim D cu A, ducem din B o paralelă la DA și fie N punctul ei de intersecție cu latura AC. Dreapta MN este dreapta Δ căutată; într-adevăr,

$$\text{aria } \Delta\, BNA = \text{aria } \Delta\, BND, \tag{1}$$

pentru că aceste două triunghiuri au aceeași bază BN și înălțimile egale, deoarece vîrfurile opuse se găsesc pe o paralelă la bază. Pe de altă parte,

$$\text{aria } \Delta\, MCN = \text{aria } \Delta\, MDN, \tag{2}$$

pentru că aceste două triunghiuri au aceeași înălțime, iar bazele MC și MD egale prin construcție.

Descompunem patrulaterul $ABMN$ în două triunghiuri

$$\text{aria } \square\, ABMN = \text{aria } \Delta\, BNM + \text{aria } \Delta\, BNA; \tag{3}$$

însă, în virtutea egalității (1), înlocuim BNA prin BND și, ținînd seama că aria $\Delta\, BNM$ + aria $\Delta\, BND$ = aria $\Delta\, MDN$, din suma (3) deducem

$$\text{aria } \square\, ABMN = \text{aria } \Delta\, MDN. \tag{4}$$

Din (2) și (4) rezultă

$$\text{aria } \square\, ABMN = \text{aria } \Delta\, MCN. \tag{5}$$

Generalizare. Ne propunem să ducem prin punctul M dreapta Δ care să împartă suprafața triunghiului în două părți, al căror raport să fie egal cu un număr dat k.

Luăm pe latura BC punctul D astfel ca $\dfrac{BD}{DC} = k$; unim A cu D și observăm că, triunghiurile ADB și ADC avînd aceeași înălțime AI,

$$\frac{\text{aria } \Delta\, ADB}{\text{aria } \Delta\, ADC} = \frac{DB \times AI}{DC \times AI} = \frac{DB}{DC} = k.$$

Unim punctul A cu M, ducem paralela DN la AM, notînd cu N intersecția ei cu latura AC. Dreapta MN este dreapta $\triangle$ căutată; într-adevăr,

$$\text{aria } \triangle AMN = \text{aria } \triangle AMD$$

pentru că aceste două triunghiuri au aceeași bază AM, iar vîrfurile opuse, pe o paralelă la bază. Rezultă următoarele relații dintre arii:

$$\text{aria } \square ABMN = \text{aria } \triangle ABM + \text{aria } \triangle AMN = \text{aria } \triangle ABM + \text{aria } \triangle AMD,$$

deci

$$\text{aria } \square ABMN = \text{aria } \triangle ABD.$$

Dar

$$\frac{\text{aria } \triangle ABD}{\text{aria } \triangle ADC} = k,$$

deci

$$\frac{\text{aria } \square ABMN}{\text{aria } \triangle ADC} = k.$$

Dar

$$\text{aria } \triangle ADC = \text{aria } \triangle MNC \text{ pentru că aria } \triangle ADN = \text{aria } \triangle MDN,$$

deci

$$\frac{\text{aria } \square ABMN}{\text{aria } \triangle MNC} = k.$$

În cazul în care D este mijlocul laturii BC, avem $\frac{BD}{DC} = 1$ adică raportul $k = 1$, de unde rezultă cazul particular din enunț.

I.2. *Printr-un punct dat A din planul unui cerc O se duce dreapta variabilă AM, unde M este punctul curent pe cerc; pe prelungirea acestei drepte se ia $AM = MN$. Se cere locul geometric al punctului N.*

Soluție. Considerăm cazul general, $AN = k \times AM$; enunțul corespunde cazului particular $k = 2$. Fie O centrul cercului, R raza sa; determinăm pe dreapta AO punctul C prin condiția $AC = k \times AO$ și observăm că triunghiurile AOM și ACN sînt asemenea pentru că au un unghi egal, unghiul din A, cuprins între laturi proporționale

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AO} = k;$$

rezultă că și celelalte laturi sînt în același raport k, adică

$$\frac{CN}{OM} = k \quad \text{sau} \quad CN = k \times OM = k \times R.$$

Punctul C fiind fix și distanța CN constantă și egală cu kR, rezultă că locul geometric descris de punctul N este cercul cu centrul în C și raza kR.

Soluție analitică. În raport cu sistemul de referință xOy considerăm o curbă c de ecuație $y = f(x)$ și pe ea punctul curent $m(x, y)$; pe dreapta Om alegem punctul $M(X, Y)$ astfel ca $OM = k \times Om$, unde k este o constantă; deducem

$$X = kx, \quad Y = ky.$$

Dacă m descrie curba c, punctul M descrie o curbă C, a cărei ecuație se deduce prin eliminarea lui x și y între ecuațiile

$$y = f(x), \quad X = kx, \quad Y = ky.$$

Rezultatul eliminării este

$$\frac{Y}{k} = f\left(\frac{X}{k}\right) \quad \text{sau} \quad Y = kf\left(\frac{X}{k}\right).$$

Curbele c și C se numesc *omotetice*, centrul de omotetie fiind O, iar raportul k. De exemplu, omotetica unei drepte $ax + by + c = 0$ este tot o dreaptă și anume $aX + bY + ck = 0$, adică o dreaptă paralelă cu cea dată.

Omotetica unui cerc $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ este tot un cerc și anume

$$(X - ka)^2 + (Y - kb)^2 = k^2R^2.$$

Omotetica parabolei $y^2 - 2px = 0$ este parabola $Y^2 - 2pkX = 0$; omoteticele elipsei și hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{și} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

sînt respectiv elipsa și hiperbola

$$\frac{X^2}{(ka)^2} + \frac{Y^2}{(kb)^2} - 1 = 0 \quad \text{și} \quad \frac{X^2}{(ka)^2} - \frac{Y^2}{(kb)^2} - 1 = 0.$$

I.3. *Se dă paralelogramul $ABCD$, în care $AB = DC = a$, $AD = BC = b$; $(a > b)$; se duc bisectoarele interioare AEG, BFG, CFH, DEH ale unghiurilor A, B, C, D. Se cere:*

1. *Să se demonstreze că patrulaterul $EHFG$, format din cele patru bisectoare, este un dreptunghi.*

2. *Dacă vîrfurile C și D sînt fixe, lungimile a și b constante, iar unghiurile A, B, C, D variabile în propriul lor plan, să se găsească locurile geometrice descrise de punctele E, F, G, H, I, J unde I și J sînt punctele de intersecție ale laturii AB respectiv cu bisectoarele DEH și CFH.*

3. *Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, $EHFG$, este un pătrat; să se calculeze aria sa.*

Soluție. 1. Notăm

$$\sphericalangle A = 2\alpha, \quad \sphericalangle B = 2\beta, \quad \sphericalangle C = 2\gamma, \quad \sphericalangle D = 2\delta,$$

iar unghiurile E, F, G, H, din patrulaterul $EHFG$, respectiv cu φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

În triunghiul AED, avem

$$\varphi_1 = \sphericalangle AED = 180° - (\alpha + \delta).$$

Însă, într-un paralelogram, suma a două unghiuri adiacente unei laturi este egală cu 180°, deci $2\alpha + 2\delta = 180°$, $\alpha + \delta = 90°$, urmează că $\varphi_1 = 180° - 90° = 90°$. Se arată la fel, din triunghiurile BFC, AGB, DHC, că $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 90°$, deci patrulaterul $EHFG$ este un dreptunghi.

2. Fie K și L punctele de intersecție ale laturii DC respectiv cu bisectoarele AEG și BFG; triunghiul DAK este isoscel pentru că

$$\sphericalangle AKD = \sphericalangle KAB = \alpha = \sphericalangle KAD,$$

deci $DK = DA = b$ = constant, deci punctul K este fix. La fel, triunghiul CBL este isoscel pentru că

$$\sphericalangle BLC = \sphericalangle LBA = \beta = \sphericalangle LBC,$$

deci $CL = CB = b$ = constant, deci punctul L este fix.

Unghiul DEK fiind drept, punctul E descrie cercul cu diametrul DK: se arată la fel că punctele F, G, H descriu respectiv cercurile cu diametrele LC, KL, DC.

Patrulaterele $ADKI$ și $BCLJ$ sînt paralelograme, deci

$$KI = DA = b, \quad LJ = CB = b.$$

Urmează că punctele I și J descriu cercurile cu raza b și centrele respectiv în K și L.

3. Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 45°$, triunghiul dreptunghi DEK este isoscel, $DE = EK$, și, aplicînd teorema lui *Pitagora*,

$$b^2 = DK^2 = DE^2 + EK^2 = 2EK^2, \quad EK = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Din triunghiurile dreptunghiuri isoscele CFL și KGL deducem

$$b^2 = LC^2 = 2FL^2, \quad FL = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

$$KL^2 = 2KG^2, \quad KG = GL = \frac{KL}{\sqrt{2}}.$$

Dar $DC = a$, $DK = LC = b$, deci $KL = a - 2b$, iar

$$KG = GL = \frac{KL}{\sqrt{2}} = \frac{a - 2b}{\sqrt{2}}.$$

Deducem $EG = EK + KG = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{a-2b}{\sqrt{2}} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$,

$$FG = FL + LG = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{a-2b}{\sqrt{2}} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Dreptunghiul $EHFG$ avînd laturile consecutive EG şi GF egale, este un pătrat; aria lui este egală cu

$$\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{2}.$$

Observaţii. 1. Problema de faţă poate fi privită ca o *problemă de închidere* şi anume: bisectoarele unui *paralelogram dat* formează un dreptunghi; bisectoarele *acestui dreptunghi* formează un pătrat, *iar bisectoarele acestui pătrat* formează un punct (sînt concurente în centrul pătratului). *Lanţul* paralelogram, dreptunghi, pătrat, punct este finit la partea lui inferioară (nu poate fi prelungit mai departe, pentru că nu are sens să vorbim de bisectoarele unui patrulater redus la un punct). Se pune întrebarea dacă lanţul nu poate fi prelungit la partea lui superioară, adică să se determine patrulaterul ale cărui bisectoare formează un paralelogram, apoi un alt patrulater ale cărui bisectoare să formeze patrulaterul precedent etc.

2. Există o propoziţie analogă pentru un pentagon, exagon şi în general pentru un poligon cu n laturi.

I.4. *Într-un triunghi oarecare ABC, fie: D piciorul înălţimii coborîte din A pe BC, E piciorul înălţimii coborîte din B pe AC, F mijlocul lui AB, G mijlocul lui AC, O centrul cercului circumscris triunghiului.*

Presupunînd că $AD = DC$ şi $AB = 2BD$, se cere:

1. *să se construiască triunghiul cunoscînd înălţimea AD;*
2. *să se arate că $\sphericalangle FDG = 75°$;*
3. *să se arate că dreptele AO şi BO sînt perpendiculare;*
4. *să se arate că lungimea DE este egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABC.*

Soluţie. 1. Observăm că triunghiul ACD este triunghi dreptunghi isoscel, deci $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = 45°$, iar triunghiul dreptunghi ABD este jumătate dintr-un triunghi echilateral, deci $\sphericalangle BAD = 30°$, $\sphericalangle ABD = 60°$. Rezultă de aici următoarea construcţie simplă a triunghiului ABC, cînd se cunoaşte înălţimea AD:

Se construieşte întîi triunghiul dreptunghi isoscel ACD, apoi se duce o semidreaptă AB astfel ca $\sphericalangle BAD = 30°$; această semidreaptă intersectează prelungirea lui CD în punctul B, care este al treilea vîrf al triunghiului ABC. Construcţia se poate face totdeauna şi într-un singur fel.

2. Din cele spuse reiese că unghiurile triunghiului ABC sînt:

$$\sphericalangle A = 75°, \quad \sphericalangle B = 60°, \quad \sphericalangle C = 45°.$$

Punctele F, G fiind centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, ACD, rezultă că triunghiurile ADF, ADG sînt isoscele, deci, $\sphericalangle FDA = \sphericalangle FAD = 30°$, $\sphericalangle GDA = \sphericalangle GAD = 45°$.

$$\sphericalangle FDG = \sphericalangle FDA + \sphericalangle GDA = 75°.$$

3. Unghiul la centru AOB este îndoitul unghiului C al triunghiului, deci $\sphericalangle AOB = 90°$, dreptele AO, BO sînt perpendiculare.

4. Fie I mijlocul laturii BC; triunghiul BCE fiind dreptunghi isoscel, rezultă că dreapta EI este perpendiculară pe BC şi egală cu jumătatea lui BC; mai rezultă de asemenea că punctul O se află pe dreapta EI. Din patrulaterul inscriptibil $ABDE$ rezultă $\sphericalangle EDC = \sphericalangle A = 75°$, iar din triunghiul isoscel BOC, $\sphericalangle IOC = \sphericalangle \frac{1}{2} BOC = 75°$; triunghiurile dreptunghice DEI, IOC, avînd catetele EI, IC egale şi unghiurile ascuţite EDI, IOC egale, sînt egale, deci şi ipotenuzele lor sînt egale, $DE = OC = R$.

Observaţie. Triunghiul ABC, din cauza particularităţii lui, se bucură de o mulţime de proprietăţi interesante dintre care vom enumera numai cîteva.

Să calculăm unghiurile triunghiului ortic DEH (H este piciorul înălţimii dusă din C). Se vede imediat că:

$$\sphericalangle EDH = 180° - \sphericalangle EDC - \sphericalangle HDB = 180° - 2A,$$

$$\sphericalangle HED = 180° - 2B, \quad \sphericalangle EHD = 180° - 2C.$$

Aceste egalităţi, adevărate pentru orice triunghi ABC, devin în cazul de faţă:

$$\sphericalangle EDH = 30°, \quad \sphericalangle HED = 60°, \quad \sphericalangle EHD = 90°,$$

deci *triunghiul ortic DEH este dreptunghi şi are unghiurile sale în progresie aritmetică.*

Cercul circumscris triunghiului ortic este tocmai cercul lui *Euler* al triunghiului iniţial, iar diametrul acestui cerc este egal cu raza cercului circumscris triunghiului iniţial, deci $DE = R$. Avem astfel o nouă demonstraţie pentru punctul 4 al problemei.

Fie M, ortocentrul triunghiului ABC. Triunghiul MBD fiind isoscel ($MD = BD$) rezultă că triunghiurile ABD, BCH sînt egale; mai rezultă că $AB = MC$, precum şi *egalitatea cercului de diametru AB cu cercul circumscris triunghiului CDE.*

Dacă X este mijlocul lui MC, patrulaterul $EFDX$ este un pătrat.

În adevăr, acest patrulater are laturile egale şi este înscris în cercul lui *Euler.*

Fie D', E', H' intersecțiile celor trei înălțimi AD, BE, CH cu cercul ABC. Triunghiurile $D'E'H'$, DEH fiind asemenea, rezultă că *dreapta* $D'E'$ *este diametru în cercul* ABC.

Latura AB *este latura pătratului înscris în cercul* O, *iar latura* AC *este latura triunghiului echilateral înscris în același cerc*; $H'E'$ *este latura exagonului regulat înscris în cercul* O (*deci* $H'E' = R$), $D'H'$ *este latura triunghiului echilateral înscris în* O, *patrulaterul* $ACD'H'$ *este un trapez isoscel.*

Tangenta în O *la cercul de diametru* AB *este dreapta* EI, *căci aceasta este perpendiculară pe raza* OF.

Segmentul HD este o coardă în cercul lui *Euler*, corespunzătoare unghiului înscris $\sphericalangle HED = 60°$, iar FI de asemenea este o coardă a aceluiași cerc, corespunzătoare la $\sphericalangle FGI = 60°$, deci $DH = IF$, adică *patrulaterul* $HFDI$ *este un trapez isoscel.*

Se știe, că oricum ar fi triunghiul ABC, avem $MB = 2OG$; în cazul de față OG fiind apotema triunghiului echilateral înscris în cercul O, rezultă $MB = R$.

Triunghiul MCD' *este echilateral*: *triunghiul* MBD' *este dreptunghi isoscel*; *triunghiul* OMB *este isoscel*; *cercul lui Euler al triunghiului* ABC *trece prin mijlocul razei* OB; *ortocentrul triunghiului* CDE *este punctul* O.

Am putea continua cu enumerarea altor proprietăți ale figurii. Proprietățile precedente, precum și altele noi, se pot deduce și pe cale trigonometrică. Astfel, se știe că în orice triunghi avem relațiile: $MA = 2R \cos A$, $MB = 2R \cos B$, $MC = 2R \cos C$;

$$HE = R \sin 2A,\ DH = R \sin 2B,\ DE = R \sin 2C.$$

În triunghiul nostru, acestă relații devin:

$$MA = 2R \sin 15°,\ MB = R,\ MC = R\sqrt{2},$$

$$HE = \frac{R}{2},\ DE = R,\quad DH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Tot asemenea am putea găsi alte proprietăți noi, pe această cale.

Vom trata acum o altă chestiune, Deoarece triunghiurile care au proprietățile triunghiului ABC sînt asemenea, ne întrebăm care sînt relațiile care leagă laturile unor astfel de triunghiuri.

Este evident că vom avea două astfel de relații.

Din cele spuse la început reiese că avem:

$$AB = c = R\sqrt{2},\ AC = b = R\sqrt{3};$$

aplicînd apoi teorema lui *Pitagora* triunghiului ABC, avem:

$$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AE;$$

dar

$$AE = AC - EC = b - \frac{a}{\sqrt{2}},$$

deci

$$a^2 = -R^2 + aR \cdot \sqrt{6},$$

$$a = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{3} \pm 1)}{2}.$$

Excluzînd cazul semnului minus, care nu convine, rămîne:

$$a = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}.$$

Eliminînd pe R între cele trei egalităţi care dau pe a, b, c, obţinem:

$$\frac{2a}{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Acestea sînt relaţiile căutate. Puteam ajunge la ele şi pe cale trigonometrică. În adevăr avem:

$$\cos B = 1/2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = ab\sqrt{2}, \qquad c^2 + a^2 - b^2 = ca.$$

Acestea sînt relaţiile dintre laturi, scrise sub altă formă.

Ne putem propune să deducem din acestea pe cele date anterior (problema inversă fiind mai simplă); operaţia este un calcul interesant de algebră elementară. Adunînd cele două relaţii, deducem:

$$2a^2 = a\,(b\sqrt{2} + c),$$

sau, simplificînd cu $a \neq 0$, rezultă:

$$a = \frac{b\sqrt{2} + c}{2}.$$

Ducînd această valoare într-una din cele două relaţii, de exemplu în prima, avem:

$$\frac{(b\sqrt{2} + c)^2}{4} + b^2 - c^2 = \frac{b\sqrt{2}\,(b\sqrt{2} + c)}{2}$$

şi făcînd toate calculele: $2b^2 = 3c^2$, $\frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$ etc.

Aria triunghiului se calculează cu formula:

$$S = \frac{R^2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)}{4},$$

sau cu una dintre formulele:

$$S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\,(c^2 + a^2 - b^2)}{4}.$$

Pentru a încheia, vom căuta relaţia care există între razele R, r ale cercului circumscris şi cercului înscris.

Se ştie că avem relaţia:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

valabilă pentru orice triunghi ABC.

În problema noastră:

$$\cos A = \cos 75° = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}, \quad \cos B = \frac{1}{2}, \quad \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

deci relaţia precedentă devine:

$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{r}{R}, \quad 4r = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2)}{R}.$$

Aceasta este relaţia căutată.

I.5. *Se dă un triunghi dreptunghi isoscel AOB, $OA = OB$; pe cateta OA (sau pe prelungirea ei) se ia un punct arbitrar P, iar pe cateta OB (sau pe prelungirea ei) un punct Q așa fel ca $\sphericalangle BPQ = 90°$. Paralela dusă din A la PQ, taie dreapta OB în R.*

1. *Să se arate că triunghiul POR este isoscel.*

2. *Să se determine poziția lui Q astfel ca segmentul OP să fie de două ori mai mare decît distanța OS a punctului O la dreapta PQ.*

Soluție. 1. Triunghiurile dreptunghice AOR și BOP sînt egale pentru că $AO = BO$ și unghiurile primului sînt egale cu unghiurile celuilalt (laturile AO, OR, RA sînt respectiv perpendiculare pe laturile BO, OP, PB). Rezultă că și celelalte laturi sînt respectiv egale, adică $OR = OP$ și $RA = PB$. Triunghiul dreptunghi POR este isoscel pentru că are catetele OR și OP egale.

2. În triunghiul dreptunghi QPB avem

$$OP^2 = OQ \times OB.$$

Triunghiurile dreptunghice POS și OQS sînt asemenea pentru că laturile primului sînt perpendiculare pe laturile celuilalt, deci

$$\frac{OP}{OS} = \frac{QO}{QS}.$$

Însă prin ipoteză $OP = 2 \times OS$, deci $OQ = 2 \times QS$ sau

$$OP^2 = 4 \times OS^2, \quad OQ^2 = 4 \times QS^2,$$

$$OP^2 + OQ^2 = 4(OS^2 + QS^2) = 4OQ^2, \quad OP^2 = 3OQ^2.$$

Însă

$$OP^2 = OQ \times OB,$$

deci

$$OQ \times OB = 3OQ^2,$$

de unde deducem două soluții

$$OQ = 0 \quad \text{sau} \quad OQ = \frac{OB}{3},$$

adică punctul Q coincide cu vîrful O sau se găsește la o distanță de O egală cu o treime din lungimea OB.

Soluție analitică. 1. Raportăm triunghiul la sistemul Oxy, A pe Ox și B pe Oy Coordonatele punctelor A, B, P, O sînt

$$A(a, 0), \ B(0, a), \ P(\alpha, 0), \ Q(0, \beta).$$

Prin ipoteză, dreptele PB și PQ sînt perpendiculare, coeficienții lor unghiulari au deci produsul egal cu -1, adică

$$\frac{a-0}{0-\alpha} \times \frac{\beta-0}{0-\alpha} + 1 = 0,$$

sau

$$\frac{a\beta}{\alpha^2} + 1 = 0, \quad \beta = -\frac{\alpha^2}{a}$$

sau

$$\alpha^2 = -a\beta.$$

Dacă notăm coordonatele punctului R prin 0 și λ, ecuațiile dreptelor PQ și AR sînt respectiv

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$$

și

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0.$$

Însă dreptele sînt paralele, deci au coeficienții unghiulari egali, deci $-\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\lambda}{a}$ sau $\lambda = -\frac{a\beta}{\alpha}$ sau, înlocuind β cu $\frac{\alpha^2}{a}$, găsim $\lambda = -\alpha$, adică în valoare absolută $OR = OP$.

2. Ecuația dreptei PQ este

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$$

sau

$$\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0.$$

Distanța OS de la origina O la această dreaptă este dată de

$$OS^2 = \frac{(-\alpha\beta)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Prin ipoteză $OP = 2 \times OS$, deci

$$\alpha^2 = \frac{4\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

sau, înlocuind α^2 prin $-a\beta$,

$$a\beta^2(3\beta + a) = 0,$$

de unde deducem două soluții: $\beta = 0$ și $\beta = -\frac{a}{3}$.

I.6. *Se dă un paralelogram $ABCD$, a cărui diagonală BD se împarte prin punctele M și N în trei părți egale. Dreapta AM taie latura BC în A_1, iar AN taie latura CD în A_2; de asemenea, dreapta CM taie pe AB în C_2, iar CN taie AD în C_1. Se cere:*

1. *Să se arate că patrulaterele $AMCN$ și A_2MC_2N sînt paralelograme.*

2. *Să se determine raporturile dintre ariile acestor paralelograme și aria paralelogramului $ABCD$.*

3. *Cum trebuie să fie paralelogramul $ABCD$ pentru ca $AMCN$ să fie un dreptunghi? Dar ca A_2MC_2N să fie dreptunghi?*

Soluție 1. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD (fig. 1), O este centrul de simetrie al paralelogramului, deci

$$AO = OC, \quad BO = OD.$$

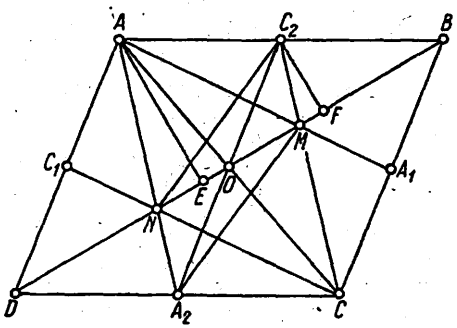


Fig. 1

Prin construcție

$$BM = ND,$$

deci

$$BO - BM = OD - ND,$$

adică

$$MO = ON.$$

Într-un paralelogram, diagonalele se taie în părți egale și reciproc, dacă într-un patrulater diagonalele se taie în părți egale, atunci el este un paralelogram. Am văzut că

$$AO = OC \text{ și } MO = ON,$$

deci patrulaterul $AMCN$ este un paralelogram.

În triunghiul ABC, OB este o mediană, iar prin construcție $BM = 2MO$, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar AA_1 și CC_2 sînt celelalte două mediane, adică C_2 este mijlocul lui AB, iar A_1 mijlocul lui BC. Același raționament aplicat triunghiului ADC arată că A_2 este mijlocul lui CD, iar C_1 mijlocul lui DA.

A_2C_2 unește mijloacele a două laturi paralele ale paralelogramului, deci este paralelă și egală cu celelalte două și trece prin centrul de simetrie O, iar $A_2O = OC_2$.

În definitiv

$$A_2O = OC_2 \text{ și } MO = ON,$$

deci patrulaterul A_2MC_2N este un paralelogram.

Altă demonstrație este următoarea: $AN = MC$ ca laturi opuse în paralelogram; $AA_2 = C_2C$ ca paralele cuprinse între paralele; prin scădere deducem

$$AA_2 - AN = C_2C - MC$$

sau

$$NA_2 = C_2M.$$

Patrulaterul A_2MC_2N este deci un paralelogram pentru că are două laturi opuse NA_2 şi C_2M, egale şi paralele.

2. O diagonală împarte paralelogramul în două triunghiuri egale, deci

aria $ABCD = 2$ aria ABD; aria $AMCN = 2$ aria AMN.

Dacă însemnăm cu E piciorul perpendicularei coborîte din A pe diagonala BD, observăm că triunghiurile ABD şi AMN au aceeaşi înălţime AE, iar bazele lor BD şi MN sînt în raportul 3/1, deci aria $ABD = 3$ aria AMN, sau

$$\text{aria } ABCD = 3 \text{ aria } AMCN.$$

C_2 este mijlocul laturii BA şi dacă însemnăm cu F piciorul perpendicularei coborîte din C_2 pe diagonala BD, avem $AE = 2C_2F$. Urmează că triunghiurile AMN şi C_2MN, avînd aceeaşi bază MN, vor avea ariile în acelaşi raport cu înălţimile lor AE şi C_2F, adică $\frac{2}{1}$, deci aria $AMN = 2$ aria C_2MN.

Dar aria $AMCN = 2$ aria AMN; aria $A_2MC_2N = 2$ aria C_2MN, deci

$$\text{aria } AMCN = 2 \text{ aria } A_2MC_2N.$$

În definitiv am arătat că

aria $ABCD = 3$ aria $AMCN$ şi aria $AMCN = 2$ aria A_2MC_2N

aria $AMCN = \frac{1}{3}$ aria $ABCD$; aria $A_2MC_2N = \frac{1}{6}$ aria $ABCD$.

3. Paralelogramul $AMCN$ este un dreptunghi dacă diagonalele sale AC şi MN sînt egale, sau $3AC = 3MN$.
Dar $3MN = BD$, deci condiţia este $BD = 3AC$.

Paralelogramul A_2MC_2N este un dreptunghi dacă diagonalele sale MN şi A_2C_2 sînt egale, sau

$$3MN = 3A_2C_2.$$

Dar $3MN = BD$, iar $A_2C_2 = CB = DA$. Condiţia căutată devine

$$BD = 3BC.$$

Generalizare. Să presupunem că pe diagonala BD se iau punctele M şi N simetrice în raport cu O, aşa fel ca $BD = kMN$, deci $BO = k \cdot MO$ şi $OD = k \cdot ON$ (enunţul dat corespunde la cazul particular $k=3$). Se demonstrează ca mai sus că patrulaterele $AMCN$ şi A_2MC_2N sînt paralelograme. În triunghiul ABN, C_2M este paralelă cu latura AN, deci

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{NM}{MB} = \frac{2OM}{(k-1)OM} = \frac{2}{k-1}.$$

Deducem

$$\frac{AC_2 + C_2B}{C_2B} = \frac{2 + k - 1}{k - 1}$$

sau

$$\frac{AB}{C_2B} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Dar

$$\frac{AB}{C_2B} = \frac{AN}{C_2M} = \frac{AE}{C_2F},$$

deci

$$\frac{AE}{C_2F} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Triunghiurile ABD și AMN au aceeași înălțime AE, iar bazele lor sînt în raportul $\frac{BD}{MN} = k$, deci

$$\text{aria } ABCD = k \cdot \text{aria } AMCN.$$

Triunghiurile AMN și C_2MN au aceeași bază MN, iar înălțimile lor AE și C_2F sînt în raportul $\frac{k+1}{k-1}$, deci

$$\text{aria } AMCN = \frac{k+1}{k-1} \text{ aria } A_2MC_2N.$$

Paralelogramul $AMCN$ este un dreptunghi dacă $MN = AC$, sau $k \cdot MN = k \cdot AC$ sau $BD = k \cdot AC$.

I.7. *Se dă un trapez isoscel $ABCD$, de baze $AB = 2a$ și $CD = 2b$, ale cărui diagonale se taie în unghi drept. Se cere:*

1. *Să se arate cum se poate construi un astfel de trapez cînd se cunoaște a și b.*

2. *Să se demonstreze că suma ariilor pătratelor construite pe cele două baze este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe laturile oblice ale trapezului.*

3. *Fie $ADD'A'$ pătratul construit pe latura AD, în exteriorul trapezului. Să se găsească locul geometric al vîrfului D' al pătratului, cînd baza CD a trapezului se deplasează paralel cu AB, care rămîne fixă.*

Soluție. 1. Pe o dreaptă se iau punctele E, F, G astfel ca $EF = a$, $FG = b$ (fig. 2); se construiesc cercurile cu centrele în E și G și care trec prin F; se construiește diametrul AEB perpendicular pe raza EF; dreptele AF și BF taie al doilea cerc în C și D. Trapezul $ABCD$ are bazele $AB = 2a$, $CD = 2b$, diagonalele AC și BD sînt perpendiculare și trapezul este isos-

cel pentru că $AD = BC$, ca ipotenuze în triunghiurile dreptunghice egale AFD şi BFC.

2. În triunghiul dreptunghi AFD, aria pătratului construit pe ipotenuza AD este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catetele AF şi DF, adică cu suma ariilor pătratelor $AFBH$ şi $CFDK$; la fel, aria pătratului construit pe latura

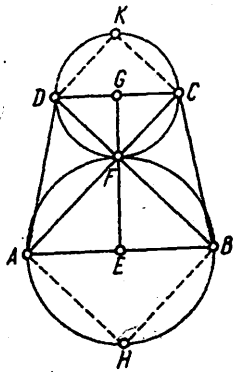


Fig. 2

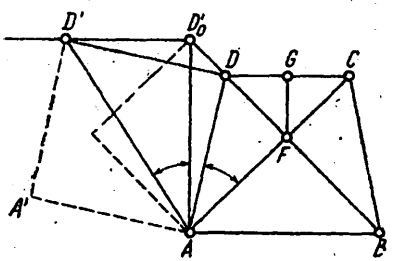


Fig. 3

$BC = AD$, este egală cu suma ariilor pătratelor $AFBH$ şi $CFDK$.

Pe de altă parte, pătratul construit pe baza AB ca latură este egal cu pătratul circumscris primului cerc şi aria lui este egală cu dublul ariei pătratului înscris $AFBH$, iar pătratul construit pe baza CD ca latură este egal cu pătratul circumscris cercului al doilea şi aria lui este dublul ariei pătratului înscris $CFDK$, de unde rezultă, prin adunare, ceea ce trebuia demonstrat.

O altă demonstraţie este următoarea :

$$AD^2 + BC^2 = 2AD^2 = 2\,(AF^2 + DF^2) = 2\,(AE^2 + EF^2 + DG^2 + GF^2) =$$

$$= 2\,(a^2 + a^2 + b^2 + b^2) = 4\,(a^2 + b^2) = (2a)^2 + (2b)^2 = AB^2 + CD^2.$$

3. Dacă AB rămîne fixă, a este constant şi triunghiul AFB este fix : $b = FG$ este variabil, deci punctul D descrie dreapta fixă BF, iar C dreapta fixă AF, baza CD rămîne mereu paralelă cu AB (fig. 3).

Dacă $b = 0$, $FG = 0$, D coincide cu F, iar vîrful D'_0 al pătratului construit pe latura AF este situat pe dreapta BF astfel că $FD'_0 = AF$, deci triunghiul dreptunghi AFD'_0 este isoscel, adică $\sphericalangle FAD'_0 = 45°$, $AD'_0 = AF\sqrt{2}$. Dar $\sphericalangle BAF = 45°$, deci $\sphericalangle BAD'_0 = 90°$.

Cînd $b = FG$ are o valoare oarecare, fie D' vîrful pătratului construit pe latura AD; triunghiul dreptunghi ADD' este isoscel, adică $\sphericalangle DAD' = 45°$, iar $AD' = AD\sqrt{2}$.

Triunghiurile AFD şi AD'_0D' sînt asemenea, căci:

$$FAD = 45° - \sphericalangle DAD'_0, \text{ iar } \sphericalangle D'_0AD' = 45° - \sphericalangle DAD'_0,$$

deci

$$\sphericalangle FAD = \sphericalangle D'_0AD'.$$

Iar

$$AD'_0 = AF\sqrt{2},\ AD' = AD\sqrt{2}.$$

deci

$$\frac{AF}{AD'_0} = \frac{AD}{AD'},$$

prin urmare cele două triunghiuri sînt asemenea pentru că ele au cîte un unghi egal cuprins între laturi proporţionale.

Rezultă

$$\sphericalangle AD'_0D' = \sphericalangle AFD = 90°.$$

Dar am văzut că $\sphericalangle BAD'_0 = 90°$, deci dreapta D'_0D' este paralelă cu AB, ceea ce revine a spune că vîrful D' descrie o paralelă la dreapta AB, distanţa AD'_0 fiind egală cu $AB = 2a$.

I.8. *Fiind date două cercuri* (C) *şi* (C'), *să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor* (K) *astfel încît coardele comune* AB *şi* $A'B'$ *la* (C) *şi* (K) *de o parte, la* (C') *şi* (K) *de altă parte, să fie diametri ai lui* (K).

Soluţie. Fie O şi O' centrele cercurilor (C) şi (C'), iar ω centrul unui cerc (K). Avem: $\omega A \times \omega B = \omega A' \times \omega B'$, punctul ω are deci puteri egale faţă de cercurile (C) şi (C'), prin urmare aparţine axei lor radicale (fig. 4).

Din însuşi enunţul problemei reiese că orice punct ω al locului geometric se află atît în interiorul cercului (C) cît şi în interiorul cercului (C'), deci, dacă ne mărginim numai la punctele reale, locul geometric se compune din coarda comună a cercurilor

(C) (C'), mărginită de punctele ei de intersecție cu cele două cercuri.

Reciproc, presupunînd cercurile (C), (C') secante, fie ω un punct oarecare de pe coarda lor comună, situat în interiorul celor două cercuri. Perpendiculara în ω pe $O\omega$ taie cercul (C) în A și B, iar perpendiculara în ω pe $O'\omega$ taie cercul (C') în A', B'. Punctele A, B, A', B' sînt pe un cerc (K). În adevăr avem

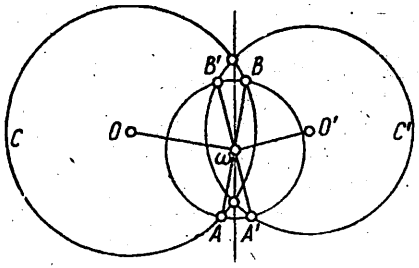


Fig. 4

$$\omega A \times \omega B = \omega A' \times \omega B'.$$

Dar

$$\omega A = \omega B, \quad \omega A' = \omega B',$$

deci

$$\omega A^2 = \omega A'^2, \quad \omega A = \omega A',$$
$$AB = A'B'.$$

Figura $ABA'B'$ este deci un dreptunghi cu centrul în ω, cercul $ABA'B'$ este deci un cerc (K).

Lucrul acesta se vede ușor pe cale de geometrie analitică. Fie

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

ecuațiile cercurilor (C), (C'), (K) în raport cu un sistem de axe dreptunghiulare oarecare.

Axele radicale ale cercurilor (C), (C'), (K) au ecuațiile:

$$2(\alpha - a)x + 2(\beta - b)y + c - \gamma = 0,$$
$$2(\alpha - a')x + 2(\beta - b')y + c' - \gamma = 0.$$

Scriind că aceste drepte trec prin punctul (α, β), centrul cercului (K), avem:

$$2(\alpha - a)\alpha + 2(\beta - b)\beta + c - \gamma = 0.$$
$$2(\alpha - a')\alpha + 2(\beta - b')\beta + c' - \gamma = 0.$$

Eliminînd pe γ prin scădere, rezultă:

$$2(a - a')\alpha + 2(b - b')\beta + c' - c = 0.$$

Deci punctul (α, β) verifică ecuația:

$$2(a - a')x + 2(b - b')y + c' - c = 0,$$

care reprezintă axa radicală a cercurilor (C) și (C'). Proprietatea este deci complet demonstrată.

Dacă acum considerăm trei cercuri (C), (C'), (C''), putem enunța proprietatea:

Există un cerc (K) și numai unul, astfel ca axele lui radicale cu fiecare dintre cele trei cercuri să fie diametri ai lui (K).

Proprietățile de mai sus se extind fără nicio dificultate pentru cazul a două, a trei sau a patru sfere.

1.9. *Să se afle laturile unui triunghi isoscel, cunoscînd mediana și înălțimea duse dintr-un vîrf al bazei pe una dintre laturile egale.*

Soluție. Fie ABC triunghiul isoscel, D, H, H' picioarele înălțimilor duse respectiv din A, B, C, fie M mijlocul laturii AC (fig. 5). Însemnăm $BH = h$, $BM = m$, $AB = AC = y$, $BC = x$. Teorema medianei ne dă

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2)-y^2},$$

$$2m = \sqrt{2x^2+y^2}.$$

Aceasta este una dintre ecuațiile problemei. Înălțimea AD este dată de formula

$$AD = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4y^2-x^2}}{2}.$$

Calculînd în două moduri aria triunghiului ABC, avem egalitatea

$$x\,\frac{\sqrt{4y^2-x^2}}{2} = hy.$$

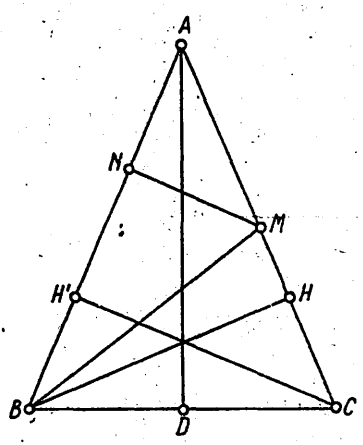


Fig. 5

Aceasta este a doua ecuație a problemei.

Avem deci de rezolvat sistemul de două ecuații

$$\sqrt{2x^2+y^2} = 2m, \qquad x\sqrt{4y^2-x^2} = 2hy,$$

cu necunoscutele x și y. Prin ridicare la pătrat, obținem sistemul

$$2x^2 + y^2 = 4m^2, \qquad x^2(4y^2 - x^2) = 4h^2y^2.$$

Eliminînd pe y, avem ecuația în x

$$x^2(16m^2 - 8x^2 - x^2) = 4h^2(4m^2 - 2x^2),$$

sau

$$9x^4 - 8(2m^2 + h^2)x^2 + 16h^2m^2 = 0,$$

care este o ecuație bipătrată. Prin rezolvarea ei obținem:

$$x^2 = \frac{4(2m^2+h^2) \pm \sqrt{16(2m^2+h^2)^2 - 9 \times 16h^2m^2}}{9},$$

sau

$$x^2 = \frac{4}{9}\left(2m^2 + h^2 \pm \sqrt{(2m^2+h^2)^2 - 9m^2h^2}\right).$$

Observăm că

$$(2m^2 + h^2)^2 - 9m^2h^2 = 4m^4 - 5m^2h^2 + h^4 = \\ = (m^2 - h^2)(4m^2 - h^2) \geqslant 0,$$

deoarece $m \geqslant h$ şi a fortiori $2\ m > h$.

Valorile găsite pentru x^2 sînt deci reale; mai observăm că

$$2m^2 + h > \sqrt{(2m^2 + h)^2 - 9m^2h^2},$$

deci valorile găsite pentru x^2 sînt ambele pozitive.

Ţinînd seama că x este o mărime pozitivă, avem

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{2m^2 + h^2 \pm \sqrt{(2m^2 + h^2)^2 - 9m^2h^2}}.$$

Deducem apoi cu uşurinţă

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{5m^2 - h^2 \mp 2\sqrt{(2m^2 + h^2)^2 - 9m^2h^2}}.$$

Semnele superioare din cei doi radicali se corespund, tot asemenea cele inferioare. Avem deci două triunghiuri care răspund problemei propuse.

Să dăm acum o construcţie geometrică a triunghiului ABC, pentru care cunoaştem elementele m, h şi vom vedea că găsim tot două triunghiuri deosebite. Presupunînd construcţia făcută, observăm că punctul H se află pe cercul de diametru BM. Fie N al doilea punct în care acest cerc taie latura AB. Segmentul MN este paralel cu CH' şi egal cu jumătatea lui, adică cu $\frac{h}{2}$.

Acum construcţia triunghiului este imediată.

Pe un segment de dreaptă $BM = m$ ca diametru, descriem un cerc. Din punctul B drept centru şi cu raza h trasăm un cerc care taie primul cerc în două puncte H, H_1, iar din punctul M drept centru şi cu raza $\frac{h}{2}$ trasăm un alt cerc care taie primul cerc în două puncte N şi N' (fig. 6).

Dreptele BN, MH se taie în A, iar perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului BAM determină la intersecţia cu MH vîrful C, ABC este unul dintre triunghiurile cerute.

Dreptele BN', MH se taie în A', iar perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului $BA'M$ taie pe MH în C'. Triunghiul $A'BC'$ este a doua soluţie a problemei.

Înlocuind în construcțiile precedente punctul H cu punctul H_1, obținem alte două triunghiuri egale cu cele două găsite mai sus și anume simetricele lor față de dreapta BM. Avem

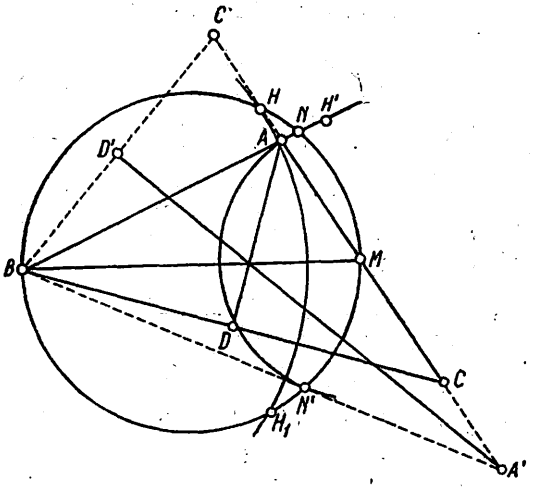


Fig. 6

deci numai două triunghiuri distincte ca mărime, așa cum am găsit și prin calcul.

I.10. *Fie ABC un triunghi dat. Luăm pe laturile BC, CA, AB punctele A', B', C' care să le împartă respectiv în rapoartele λ, μ, ν. Să se afle raportul dintre ariile triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC. Condiția ca punctele A', B', C' să fie în linie dreaptă.*

Soluție. În raport cu două axe perpendiculare, fie (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) coordonatele punctelor A, B, C. Dacă λ, μ, ν înseamnă rapoartele

$$\frac{A'B}{A'C}, \quad \frac{B'C}{B'A}, \quad \frac{C'A}{C'B},$$

în mărime și în semn, atunci coordonatele punctelor A', B', C' sînt respectiv

$$x_1' = \frac{x_2 - \lambda x_3}{1-\lambda}, \quad y_1' = \frac{y_2 - \lambda y_3}{1-\lambda}, \quad x_2' = \frac{x_3 - \mu x_1}{1-\mu}, \quad y_2' = \frac{y_3 - \mu y_1}{1-\mu},$$

$$x_3' = \frac{x_1 - \nu x_2}{1-\nu}, \quad y_3' = \frac{y_1 - \nu y_2}{1-\nu}.$$

Dacă însemnăm cu S', S ariile triunghiurilor $A'B'C'$, ABC, putem scrie

$$2S' = \begin{vmatrix} \frac{x_2 - \lambda x_3}{1-\lambda} & \frac{y_2 - \lambda y_3}{1-\lambda} & 1 \\ \frac{x_3 - \mu x_1}{1-\mu} & \frac{y_3 - \mu y_1}{1-\mu} & 1 \\ \frac{x_1 - \nu x_2}{1-\nu} & \frac{y_1 - \nu y_2}{1-\nu} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_2 - \lambda x_3 & y_2 - \lambda y_3 & 1-\lambda \\ x_3 - \mu x_1 & y_3 - \mu y_1 & 1-\mu \\ x_1 - \nu x_2 & y_1 - \nu y_2 & 1-\nu \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ -\mu & 0 & 1 \\ 1 & -\nu & 0 \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)}.$$

Observînd că penultimul determinant are valoarea $2S$, iar ultimul valoarea $1 - \lambda\mu\nu$, deducem

$$\frac{S'}{S} = (1 - \lambda\mu\nu)/(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu).$$

Cazuri particulare. Dacă A', B', C' sînt mijloacele laturilor BC, CA, AB, avem

$$\frac{S'}{S} = \frac{1+1}{(1+1)(1+1)1+1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Dacă A', B', C' sînt picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC, avem $\lambda = -\frac{c}{b}$, $\mu = -\frac{a}{c}$, $\nu = -\frac{b}{a}$, unde a, b, c sînt laturile triunghiului ABC, deci

$$\frac{S'}{S} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Dacă A', B', C' sînt picioarele înălțimilor triunghiului ABC, atunci $\lambda = -\frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} C}$, $\mu = -\frac{\operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} A}$, $\nu = -\frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} B}$, deci

$$\frac{S'}{S} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Dacă A', B', C' sînt punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, AB, avem

$$\lambda = -\frac{p-b}{p-c},\ \mu = -\frac{p-c}{p-a},\ \nu = -\frac{p-a}{p-b},$$

deci

$$\frac{S'}{S} = \frac{r}{2R}.$$

Pentru ca punctele A', B', C' să fie coliniare este necesar şi suficient ca $\lambda\mu\nu = 1$, adică

$$\left(\frac{A'B}{A'C}\right)\left(\frac{B'C}{B'A}\right)\left(\frac{C'A}{C'B}\right) = 1,$$

adică tocmai *teorema lui Menelaus.*

(Am exclus cazul în care λ, μ sau ν ar fi ∞, căci unul dintre punctele A', B', C' ar coincide cu un vîrf al triunghiului ABC).

Observaţie. Relaţia de mai sus se menţine şi în spaţiu, înlocuind triunghiul ABC cu un patrulater strîmb $ABCD$, iar ariile S',S cu volumele a două tetraedre.

I.11. *Se dă trapezul $ABCD$ în care: baza mică $AB = a$, înălţimea este h,* ctg $\sphericalangle ADC = \lambda$ *şi* ctg $\sphericalangle BCD = \mu$.

Pe laturile neparalele AD şi BC se construiesc pătratele $ADD'A'$ şi $BCC'B'$. Se uneşte A' cu B' şi în mijlocul M al laturii AB se ridică perpendiculara pe AB, care întîlneşte dreapta $A'B'$ în punctul N.

1. *Să se arate că N este mijlocul lui $A'B'$ şi că*

$$MN = \frac{DC - AB}{2}.$$

2. *Să se arate că* $A'B'^2 = a^2 + 4ha + h^2[4 + (\mu - \lambda)^2]$ *şi că aria figurii $ABB'A'$ este egală cu* $\frac{h(\lambda+\mu)(a+h)}{2}$.

Soluţie. 1. Din A şi B se duc înălţimile AE şi BF. Baza mică AB se prelungeşte la ambele capete şi pe aceste prelungiri se proiectează vîrfurile A' şi B' în S şi T. Se observă că triunghiurile $A'SA$ şi DEA sînt egale; la fel triunghiurile $B'TB$ şi CFB, ca triunghiuri dreptunghiuri cu ipotenuzele respectiv egale şi unghiurile respectiv egale (unghiuri cu laturile perpendiculare). Rezultă că:

$$AS = AE = h \text{ şi } A'S = DE = h\lambda$$

precum şi

$$BT = BF = h \text{ şi } B'T = CF = h\mu;$$

deci

$$AS = BT.$$

Figura $A'STB'$ este un trapez dreptunghi cu laturile neparalele ST şi $A'B'$. Punctul M este mijlocul laturii ST, iar dreapta MN este paralelă la bazele $A'S$ şi $B'T$ ale trapezului; dreapta MN întîlneşte latura $A'B'$ în mijlocul acesteia. Punctul N este mijlocul segmentului $A'B'$.

Tot din trapezul $A'STB'$, avem

$$2MN = A'S + B'T = DE + CF = DC - EF = DC - AB.$$

2. Din A' ducem paralele $A'P$ la ST. În triunghiul dreptunghi $A'PB'$ avem $A'B'^2 = A'P^2 + PB'^2$, însă

$$A'P = ST = h + a + h = a + 2h,$$

$$PB' = B'T - PT = B'T - A'S = h(\mu - \lambda).$$

Deci $A'B'^2 = (a + 2h)^2 + h^2(\mu - \lambda)^2 = a^2 + 4ah + h^2[4 + (\mu - \lambda)^2]$.

Aria $ABB'A'$ = aria trapezului $STB'A'$ − (aria SAA' + aria TBB');

$$2 \text{ aria } STB'A' = (B'T + A'S) \times ST = h(\mu + \lambda)(a + 2h);$$

$$2 \text{ aria } SAA' = SA \times SA' = h^2\lambda;$$

$$2 \text{ aria } TBB' = TB \times TB' = h^2\mu.$$

$$\text{Deci } 2 \text{ aria } ABB'A' = h(\mu + \lambda)(a + 2h) - (h^2\lambda + h^2\mu) = h(\lambda + \mu)(a + h).$$

I.12. *Se dă un triunghi ABC şi un punct mobil D care descrie, din cercul O circumscris triunghiului, arcul BC pe care nu se află vîrful A.*

1. Să se arate că mijloacele laturilor AB, BD, DC şi CA formează un paralelogram P.

2. Să se găsească locul punctului comun diagonalelor acestui paralelogram, cînd D descrie arcul BC.

3. Să se deducă din construcţia locului precedent, teorema:

Dreptele care unesc mijloacele razelor OA, OB, OC ale cercului O circumscris triunghiului ABC, cu mijloacele A', B', C' ale laturilor BC, CA, AB, sînt concurente.

4. *Să se exprime aria paralelogramului P în funcție de raza R a cercului O, de unghiurile triunghiului ABC și de unghiul $\omega = \sphericalangle DAC$.*

5. *Să se deducă maximul acestei arii cînd D descrie arcul BC.*

Soluție. 1. Însemnăm prin D', D'' mijloacele laturilor BD, DC, prin M mijlocul lui AD și prin P mijlocul lui $A'M$ (fig. 7).

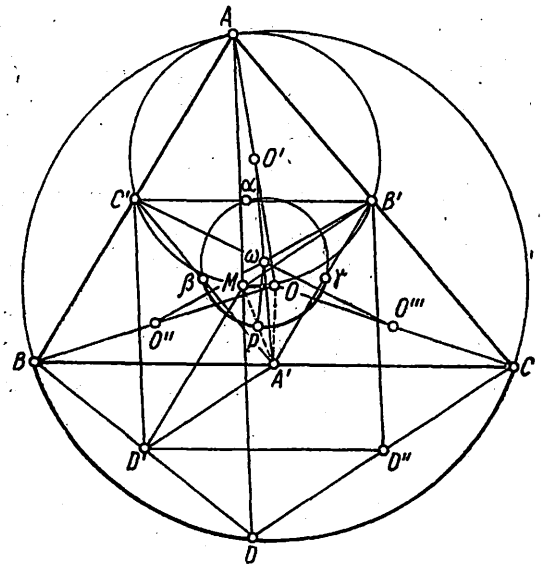


Fig. 7

Laturile $B'C'$ și $D'D''$ fiind paralele și egale (ambele sînt paralele și egale cu $\frac{BC}{2}$), rezultă că patrulaterul $B'C'D'D''$ este un paralelogram. Centrul acestui paralelogram este mijlocul diagonalei $B'D'$.

2. Patrulaterul $A'B'MD'$ este și el paralelogram, căci are laturile $A'B'$, MD' paralele și egale (ambele sînt paralele și egale cu $\frac{AB}{2}$). Centrul acestui nou paralelogram este mijlocul diagonalei $B'D'$ sau al diagonalei $A'M$. În definitiv, centrul paralelogramului $B'C'D'D''$ este punctul P, mijlocul lui $A'M$.

Punctul M este proiecția punctului O pe dreapta AD, deci M aparține cercului de diametru OA. Notăm cu O', O'', O''' mijloacele razelor OA, OB, OC. Cînd punctul D descrie

arcul BC, punctul M descrie arcul $C'OB'$ al cercului O' (cercul de diametru OA), iar punctul P descrie *omoteticul* acestui arc în raport cu *omotetia* $A'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Putem arăta acest lucru şi fără a face uz de figuri omotetice. În adevăr, fie ω mijlocul lui $A'O'$. Avem : $\omega P = \frac{O'M}{2} = \frac{R}{4}$, deci punctul P se află pe cercul cu centrul ω şi raza $\frac{R}{4}$. Dacă α, β, λ, sînt mijloacele laturilor $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, atunci, dacă D descrie arcul BC, punctul P descrie arcul $\beta P\gamma$ al cercului de centru ω şi rază $\frac{R}{4}$.

Cercul $\left(\omega, \frac{R}{4}\right)$ trece şi prin mijlocul lui OA' ; însă punctul O este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$, deci cercul precedent are trei puncte confundate cu cercul lui *Euler* al triunghiului $A'B'C'$, aşadar se confundă cu acest cerc. În rezumat, locul punctului P este arcul $\beta P\gamma$ din cercul lui *Euler* al triunghiului complementar $A'B'C'$.

3. Din cele de mai sus se vede că dreapta $A'O'$ trece prin centrul cercului lui Euler al triunghiului $A'B'C'$. Rezultă, din motive de simetrie, că şi dreptele $B'O''$, $C'O'''$ trec prin punctul ω.

4. Aria paralelogramului $B'C'D'D''$ este, evident, $\frac{1}{2}$ din aria patrulaterului $ABCD$. Dar : aria $ABCD = \frac{1}{2} BC \times AD \times$ $\times \sin u$, unde u este unghiul diagonalelor, $u = C + \omega$.

Din triunghiurile ABC, ABD, avem $BC = 2R \sin A$, $AD = 2R \sin (B + \omega)$. Deci :

$$\text{aria } ABCD = 2R^2 \sin A \sin (B + \omega) \sin (C + \omega)$$

Aria Σ a paralelogramului $B'C'D'D''$ este deci :

$$\Sigma = R^2 \sin A \sin (B + \omega) \sin (C + \omega).$$

5. Dacă însemnăm : $y = \sin (B + \omega) \sin (C + \omega)$, avem pentru derivata lui y în raport cu ω,

$$y' = \sin (B + C + 2\omega).$$

Ecuația $y' = 0$ admite ca rădăcini:

$$\omega = \frac{k \times 180° - B - C}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{(k-1) \times 180° + A}{2},$$

k fiind un număr întreg. Deoarece $\omega \leqslant A$, rezultă:

$$(k-1) \times 180° + A \leqslant 2A, \quad (k-1) \times 180° \leqslant A \leqslant 180°.$$

Deci $k - 1 \leqslant 1$, $k \leqslant 2$. Așadar avem $k = 1$ și $k = 2$.

Pentru $k = 1$, avem $\omega = \frac{A}{2}$, derivata a doua a lui y este:

$$y'' = 2 \cos (B + C + 2\omega); \quad y''\left(\frac{A}{2}\right) = 2\cos(A+B+C) =$$

$= -2 < 0$, deci pentru $\omega = \frac{A}{2}$ avem un maxim:

$$\Sigma \text{ maxim} = R^2 \sin A \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) \sin\left(C + \frac{A}{2}\right).$$

Pentru $k = 2$, avem $\omega = 90° + \frac{A}{2}$;

$$y''\left(90° + \frac{A}{2}\right) = 2 \cos (A + B + C + 180°) =$$

$$= 2 \cos 360° = 2 > 0,$$

deci în acest caz y ar avea un *minim*. Dar acest caz nu este posibil, căci ar trebui ca:

$$90° + \frac{A}{2} \leqslant A, \text{ deci ar rezulta } A \geqslant 180°.$$

Așadar, maximul ariei Σ are loc atunci cînd AD coincide cu bisectoarea interioară a unghiului A.

Această chestiune de maxim o putem studia și direct, fără a folosi derivatele. În adevăr, aria paralelogramului $B'C'D'D''$ fiind $\frac{1}{2}$ din aria patrulaterului $ABCD$, este de ajuns să căutăm maximul acestei arii. Însă aria patrulaterului $ABCD$ se compune din aria triunghiului fix ABC și a triunghiului variabil DBC. Problema revine deci la căutarea maximului ariei triunghiului DBC. Baza BC a acestui triunghi fiind fixă, aria sa va fi maximă atunci cînd înălțimea corespunzătoare va fi maximă. Aceasta se întîmplă cînd punctul D ajunge în mijlocul arcului BC, deci cînd AD este bisectoarea interioară a unghiului A.

Observaţie. Teorema de la punctul 3 este adevărată pentru orice punct O din planul unui triunghi sau dinafara planului triunghiului. Ea se poate enunţa astfel: *fie ABC un triunghi, A', B', C'* mijloacele laturilor BC, CA, AB iar *O un punct arbitrar în planul triunghiului sau în spaţiu. Se înseamnă cu A'', B'', C'', mijloacele segmentelor OA, OB, OC. Dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sînt concurente.*

Presupunem întîi cazul în care punctul O s-ar găsi în planul triunghiului ABC. Observăm că patrulaterul $B'C'B''C''$ este un paralelogram căci laturile $B'C'$ şi $B''C''$ sînt paralele şi egale. Dreptele $B'B''$, $C'C''$ au deci acelaşi mijloc, punctul ω. Considerînd apoi paralelogramul $C'A'C''A''$, conchidem că şi segmentul $A'A''$ are ca mijloc tot punctul ω. În rezumat, dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se taie în acelaşi punct ω, care este mijlocul fiecăreia dintre ele. Punctul ω este centrul unei conice care trece prin cele şase puncte A', A'', B', B'', C', C'', Dacă O este ortocentrul triunghiului ABC, această conică este chiar cercul lui *Euler* al triunghiului ABC.

Dacă punctul O este în spaţiu, se arată la fel că patrulaterele $B'C'B''C''$, $C'A'C''A''$ sînt nişte paralelograme, deci dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ au acelaşi mijloc ω, adică sînt concurente. Punctul ω, se dovedeşte, este centrul de greutate al tetraedrului $OABC$. În acest caz, teorema se enunţă şi astfel: *Într-un tetraedru, dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse trec prin centrul de greutate al tetraedrului.*

I.13. *Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul de rază R, fie M un punct variabil pe arcul BC şi P punctul în care bisectoarea unghiului BMC taie latura BC. Din P se duc perpendiculare pe dreptele BM şi CM, care taie pe CM şi BM respectiv în R şi T.*

1. *Să se demonstreze că triunghiul PRT este asemenea cu triunghiul ABC.*

2. *Să se arate cum variază raportul de asemănare al acestor două triunghiuri cînd M descrie arcul BC.*

3. *Să se afle aria triunghiului PRT în cazul în care raportul de asemănare este maxim.*

Soluţie. 1. Patrulaterul $PRMT$ avînd $\sphericalangle R = 90°$ este inscriptibil. De aci deducem $\sphericalangle P = 180° - \sphericalangle M = 180° - 120° = 60°$ şi, întrucît mai avem $PR = PT$, triunghiul PRT este isoscel şi cu un unghi de 60°, deci echilateral şi asemenea cu ABC.

2. Diametrul cercului $PRMT$ este MP, iar al cercului ABC este $2R$, deci raportul de asemănare al triunghiurilor PRT şi ABC este $\frac{MP}{2R}$.

Acest raport este proporţional cu MP şi cînd M descrie arcul BC, lungimea MP creşte de la valoarea zero la valoarea $\frac{R}{2}$, pe care o ia cînd M ajunge în mijlocul arcului BC, apoi

descreşte din nou pînă la valoarea zero; valoarea maximă a raportului de asemănare este deci egală cu $\frac{R}{2} \times \frac{1}{2R} = \frac{1}{4}$.

3. În acest caz, aria triunghiului PRT este egală cu $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ din aria triunghiului ABC adică $\frac{1}{16} \times \frac{3\sqrt{3}\,R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,R^2}{64}$.

I.14. *Fie ABC un triunghi din planul P, în care înălţimea $CE = d$ împarte latura $AB = l$ în raportul $\frac{m}{n}$. Acest triunghi este proiecţia triunghiului ABD din spaţiu, fie $CD = h$.*

1. *Să se calculeze distanţele AD şi BD.*

2. *Prin punctul F situat pe dreapta AD şi la distanţa $AF = a$ se duce un plan paralel cu P. Se cere distanţa dintre aceste două plane.*

Soluţie. 1. Din teorema celor trei perpendiculare, rezultă că DE este perpendiculară pe AB şi $DE^2 = d^2 + h^2$. Avem

$$\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}, \quad \frac{AE}{AE + EB} = \frac{m}{m+n},$$

$$AE = \frac{ml}{m+n}, \quad EB = \frac{nl}{m+n}.$$

Din triunghiurile dreptunghice DEA şi DEB rezultă:

$$AD^2 = DE^2 + EA^2, \; BD^2 = DE^2 + EB^2,$$

$$AD^2 = d^2 + h^2 + \frac{m^2l^2}{(m+n)^2}, \quad BD^2 = d^2 + h^2 + \frac{n^2l^2}{(m+n)^2}.$$

2. Planul dus prin F paralel cu P taie dreptele DB şi DC în G şi H; distanţa căutată este CH. Avem

$$\frac{AD}{AF} = \frac{CD}{CH}, \text{ deci } CH = \frac{AF \times CD}{AD},$$

$$CH = \frac{ah\,(m+n)}{\sqrt{(m+n)^2(d^2+h^2) + m^2l^2}}.$$

I.15. *Fie cercurile O şi O', secante în A şi B, de raze R şi R'; prin A şi B se duc două secante paralele CAC' şi DBD', fie C, D şi C', D' intersecţiile lor cu cele două cercuri. Să se arate că:*

1. *Figura $CDC'D'$ este un paralelogram.*

2. $CD = C'D' = \text{constant}$.

3. *Mijlocul M al lui CD și mijlocul M' al lui $C'D'$ descriu cercuri concentrice cu O și O' respectiv; coroana circulară cuprinsă între cercul O și cercul (M) are aria egală cu coroana circulară cuprinsă între cercul O' și cercul (M') și este egală cu aria cercului de diametru AB.*

Soluție. 1. Dreapta OO' a centrelor taie cercul O în P și N, cercul O' în N' și P', iar coarda AB în Q. Arcele, cuprinse între coarde paralele, sînt egale:

$$\text{arc } CPD = \text{arc } ANB, \quad \text{arc } AN'B = \text{arc } C'P'D'$$

Rezultă $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$ în cercul O, ca avînd aceeași măsură; $\sphericalangle AC'D' = \sphericalangle C'AB$, în cercul O'. Dar unghiurile CAB și BAC' sînt suplimentare, rezultă că și unghiurile DCA și $AC'D'$ sînt suplimentare, adică în patrulaterul $DCC'D'$, unghiurile din C și C' sînt suplimentare, adică DC este paralelă cu $D'C'$ și patrulaterul este un paralelogram.

2. Patrulaterele $DCAB$ și $BAC'D'$ sînt trapeze isoscele, deci $CD = AB = C'D'$.

3. Avem evident $OM = OQ = \text{constant}$, deci punctul M descrie cercul cu centrul în O și raza OQ; la fel, $O'M' = O'Q = \text{constant}$, punctul M' descrie cercul cu centrul în O' și raza $O'Q$.

Avem

$$QA^2 = OA^2 - OQ^2, \quad QA^2 = O'A^2 - O'Q^2,$$

sau

$$\pi R^2 - \pi OM^2 = \pi R'^2 - \pi O'M'^2 = \pi \frac{AB^2}{4}.$$

I.16. *Se dau două cercuri O și O' care se taie în punctele A și B. Se duce prin A o secantă arbitrară care întîlnește cercul O în P și cercul O' în P'. Pe mijlocul segmentului de dreaptă PP' se ridică o perpendiculară care taie coarda comună AB în I. Dreptele IP și IP' mai taie cercurile date O și O' în punctele Q și Q'.*

1. *Să se demonstreze că $IQ = IQ'$.*

2. *Să se deducă de aici că QQ' este paralelă cu PP'.*

3. *Dreapta QQ' mai taie cercul O în R și cercul O' în R'. Să se dovedească relațiile:*

$$PQ = AR = AR' = P'Q', \quad Q'R = AP', \quad QR' = AP.$$

4. *Să se determine locul centrului cercului circumscris triunghiului BPP', cînd secanta PP' se învîrtește în jurul punctului A.*

5. *Să se găsească locul punctului comun bisectoarelor interioare ale aceluiaşi triunghi.*

Soluţie. Notăm cu μ mijlocul segmentului de dreaptă PP', cu Ω centrul cercului circumscris triunghiului BPP', cu Ω' centrul cercului înscris în acelaşi triunghi, cu M, M' mijloacele arcelor AB din cercurile O şi O' respectiv (fig. 8).

1. Punctul I, avînd aceeaşi putere faţă cu cercurile O şi O', rezultă $IP \times IQ = IP' \times IQ'$.

Dar triunghiul IPP' este isoscel, căci dreapta $I\mu$ îi este şi mediană şi înălţime, deci $IP = IP'$. Relaţia precedentă se reduce la $IQ = IQ'$.

2. Relaţiile

$$IP = IP', \quad IQ = IQ'$$

ne dau $\frac{IP}{IQ} = \frac{IP'}{IQ'}$, deci dreapta QQ' este paralelă cu dreapta PP'.

3. Triunghiul IPP' fiind isoscel şi QQ' fiind paralelă cu PP', urmează că patrulaterul $PP'Q'Q$ este un trapez isoscel, deci

$$PQ = P'Q'.$$

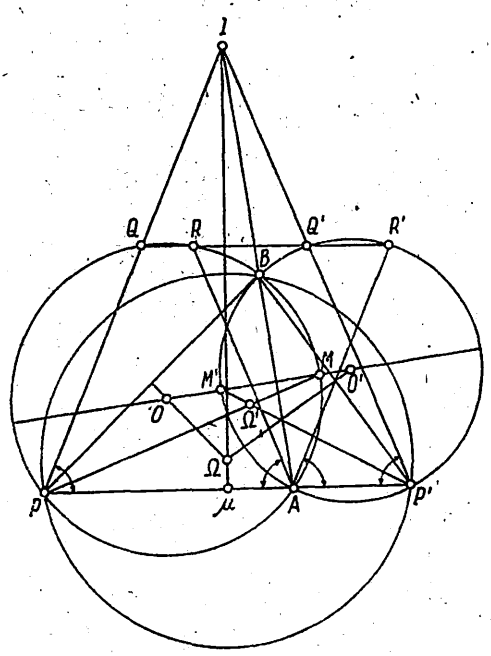


Fig. 8

Pe de altă parte, patrulaterele inscriptibile $APRQ$, $AP'R'Q'$, avînd cîte două laturi opuse paralele, sînt şi ele trapeze isoscele, deci $PQ = AR$, $P'Q' = AR'$, de unde şirul de egalităţi

$$PQ = AR = AR' = P'Q'.$$

Observăm apoi că $\sphericalangle P'AR' = \sphericalangle P'PI$, deci dreapta AR' este paralelă cu PQ.

La fel $\sphericalangle PAR = \sphericalangle PP'I$, deci dreapta AR este paralelă cu $P'Q'$.

Rezultă că patrulaterele $APQR'$, $AP'Q'R$ sînt paralelograme, deci $QR' = AP$, $Q'R = AP'$.

4. Să notăm arc $AMB = \alpha$, arc $AM'B = \alpha'$. Centrul Ω al cercului circumscris triunghiului BPP' se află la intersecția perpendicularelor duse din O și O' respectiv pe coardele BP și BP'. Rezultă că

$$\sphericalangle O\Omega O' = 180° - \sphericalangle PBP'.$$

Dar $\sphericalangle PBP' = 180° - \sphericalangle APB - \sphericalangle AP'B = 180° - \frac{(\alpha+\alpha')}{2}$.

Deci

$$\sphericalangle O\Omega O' = \frac{(\alpha + \alpha')}{2}.$$

Cînd secanta PP' se învîrteşte în jurul punctului A, arcele α şi α' rămîn, evident, aceleaşi deci :

$$\sphericalangle O\Omega O' = \frac{(\alpha + \alpha')}{2} = \text{constant}.$$

Locul geometric al punctului Ω este deci segmentul de cerc trecînd prin O şi O' şi capabil de unghiul $\frac{(\alpha + \alpha')}{2}$.

Cercul întreg din care face parte acest segment, trece natural prin punctul B, căci $\sphericalangle OBO' = 180° - \frac{(\alpha + \alpha')}{2}$.

5. Punctele M şi M' rămîn fixe în timpul rotaţiei secantei PP' în jurul lui A, iar $\sphericalangle M\Omega'M' = \sphericalangle P\Omega'P' = 180° - \frac{(\alpha+\alpha')}{4} =$ $= \text{constant}$.

Deci locul lui Ω' este segmentul de cerc care trece prin punctele M şi M' şi este capabil de unghiul $180° - \frac{(\alpha + \alpha')}{4}$.

Cercul întreg din care face parte acest segment trece şi el prin punctul B, căci $\sphericalangle MBM' = \frac{(\alpha + \alpha')}{4}$.

I.17. *Într-un exagon regulat $ABCDEF$ se duc diagonalele AC, AE şi BF; fie M şi N punctele în care diagonala BF taie respectiv diagonalele AC şi AE. Ce relaţii există între segmentele BM, MN, NF?*

Soluţie. Triunghiul AMB este isoscel pentru că unghiurile din A şi B sînt egale cu 30°, la fel pentru triunghiul ANF, deci

$$BM = MA \text{ şi } AN = NF.$$

Dar triunghiul isoscel AMN este echilateral pentru că unghiul din vîrful A are ca măsură jumătatea arcului CDE,

deci este egal cu 60°; rezultă $AM = MN = NA$. Din ultimele egalități deducem

$$BM = MN = NF,$$

adică fiecare dintre aceste trei segmente este egal cu o treime din diagonala BF (vedeți o aplicație a acestei proprietăți la problema II.16).

I.18. *Se dă un segment de dreaptă AB. Prin extremitățile A și B ale acestui segment se duc perpendicularele AX și BY pe dreapta AB.*

1. *Prin punctul I mijlocul segmentului AB se duce o dreaptă oarecare, care taie dreapta AX în P și dreapta BY în N.*

Să se arate că triunghiurile API și BNI sînt egale.

2. *Prin punctul I se duce perpendiculara pe dreapta PN, perpendiculară care taie dreapta AX în punctul M și dreapta BY în Q.*

Să se arate că triunghiul MNP este isoscel.

3. *Să se arate că $MN = AM + BN$.*

4. *L fiind punctul de pe MN astfel ca*

$$LM = AM \quad \text{și} \quad LN = BN,$$

să se arate că triunghiul ALB este dreptunghi în L.

5. *Să se arate că oricare ar fi punctul M pe AX, dreapta MN este tangentă la un cerc fix.*

Soluție. 1. Triunghiurile IAP și IBN sînt egale pentru că sînt dreptunghice respectiv în A și B, au cîte un unghi ascuțit egal, $\sphericalangle AIP = \sphericalangle BIN$ ca opuse la vîrf și au cîte o catetă egală, $IA = IB$, prin construcție.

Se arată la fel că triunghiurile IAM și IBQ sînt egale.

2. Triunghiul NMP este isoscel cu vîrful în M pentru că MI este înălțime, prin construcție, și mediană deoarece $IP = IN$ ca ipotenuze egale în triunghiurile egale de la punctul 1.

Se arată la fel că triunghiul MNQ este isoscel cu vîrful în N.

3. Triunghiul NMP fiind isoscel, $MN = MP = MA + AP$; dar $AP = BN$ ca laturi egale în triunghiurile egale de la punctul 1, deci $MN = MA + BN$.

4. Triunghiurile NMP și LMA fiind isoscele în M, au bazele NP și LA paralele; la fel, triunghiurile MNQ și LNB fiind isoscele în N, au bazele MQ și LB paralele.

Urmează că unghiul format de bazele LA și LB este egal cu unghiul format de bazele NP și MQ; însă, prin construcția de la punctul 2, NP și MQ sînt perpendiculare, deci $\sphericalangle ALB = 90°$.

5. Triunghiul ALB fiind dreptunghic în L, vîrful L se găsește pe cercul Γ de diametru AB și cu centrul în I, deci $IA = IL = IB$. Triunghiurile IAM și ILM sînt egale pentru că au laturile respectiv egale,

$$IA = IL,\ AM = LM,\ MI = MI;$$

rezultă că și unghiurile corespunzătoare sînt egale, în particular $\sphericalangle IAM = \sphericalangle ILM$. Dar, prin construcția de la punctul 1, $\sphericalangle IAM = 90°$, deci $\sphericalangle ILM = 90°$, adică dreapta MN este perpendiculara ridicată în L pe raza IL a cercului Γ, deci dreapta MN este tangentă în punctul L la cercul Γ.

I.19. *Se înscrie într-un cerc (O) un triunghi ABC.*

1. *Să se determine pe arcul BC, care nu conține pe A, un punct A' astfel încît, luînd intersecțiile A_b și A_c ale tangentei în A' la cercul (O) cu laturile AB și AC respectiv, triunghiul AA_bA_c să fie isoscel cu vîrful în A.*

2. *Se consideră analog punctele B' și C' și triunghiurile isoscele BB_aB_c, CC_aC_b, obținute prin permutarea circulară a literelor A, B, C; să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcție de unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC.*

3. *Să se calculeze de asemenea unghiurile triunghiului $A''B''C''$ format de intersecțiile dreptelor A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b.*

4. *Punctele B și C fiind fixe și A mobil pe cercul fix (O), să se găsească locul punctului A''.*

Soluție. 1. Triunghiul A_bAA_c fiind isoscel în A, bisectoarea unghiului A este perpendiculară pe latura opusă A_bA_c, care prin ipoteză este tangentă la cerc; fie A' punctul ei de tangență; raza OA' fiind perpendiculară pe tangenta A_bA_c, este paralelă cu bisectoarea unghiului A. Urmează că punctul căutat A' este punctul în care raza OA', dusă paralel cu bisectoarea unghiului A, taie arcul BC.

2. Fie D, E, F punctele în care bisectoarele interioare ale unghiurilor A, B, C taie din nou cercul, fie I punctul de intersecție al bisectoarelor. Triunghiurile $OB'C'$, $OC'A'$, $OA'B'$ sînt isoscele pentru că $OA' = OB' = OC'$ ca raze, deci

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle OB'C' = \sphericalangle 2 = \sphericalangle OC'B',$$
$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle OC'A' = \sphericalangle 4 = \sphericalangle OA'C',$$
$$\sphericalangle 5 = \sphericalangle OA'B' = \sphericalangle 6 = \sphericalangle OB'A'.$$

Unghiul BIC format de bisectoarele BE și CF este egal cu

unghiul format de razele OB' și OC', paralele cu bisectoarele, deci

$$\sphericalangle B'OC' = \sphericalangle BIC = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{EF}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AF}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sphericalangle A + 2\sphericalangle \frac{B}{2} + 2\sphericalangle \frac{C}{2}\right) = \frac{2A + B + C}{2} = \frac{A + 180^\circ}{2},$$

$$\sphericalangle B'OC' = \frac{A}{2} + 90^\circ.$$

În triunghiul isoscel $B'OC'$ avem

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle B'OC' = 180^\circ \quad \text{și} \quad \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$$

deci

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 45^\circ - \frac{A}{4}.$$

Prin permutări circulare avem în definitiv

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 45^\circ - \frac{A}{4}, \quad \sphericalangle A' = \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 90^\circ - \frac{B + C}{4},$$

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 = 45^\circ - \frac{B}{4}; \quad \sphericalangle B' = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 6 = 90^\circ - \frac{C + A}{4},$$

$$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = 45^\circ - \frac{C}{4}; \quad \sphericalangle C' = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 90^\circ - \frac{A + B}{4},$$

sau

$$A' = 45^\circ + \frac{A}{4}, \quad B' = 45^\circ + \frac{B}{4}, \quad C' = 45^\circ + \frac{C}{4}.$$

Deducem $\sphericalangle 1 + \sphericalangle A' = \sphericalangle 3 + \sphericalangle B' = \sphericalangle 5 + \sphericalangle C' = 90^\circ$. Aceste relații pot fi stabilite direct. Să ducem, de exemplu, diametrul $B'B_1$, avem

$$\sphericalangle A' + \sphericalangle 1 = \frac{\overset{\frown}{B'C'} + \overset{\frown}{C'B_1}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ,$$

pentru că arcul $B'B_1$, fiind egal cu un semicerc, corespunde la un unghi la centru egal cu 180°.

3. În patrulaterul $B'OC'A''$, laturile OB' și OC' fiind perpendiculare pe laturile $B'A''$ și $C'A''$, urmează că unghiurile opuse $\sphericalangle A''$ și $\sphericalangle B'OC'$ sînt suplimentare, adică

$$\sphericalangle A'' = 180° - \sphericalangle B'OC' = 180° - \left(\frac{A}{2} + 90°\right) = 90° - \frac{A}{2}.$$

Prin permutări circulare avem

$$A'' = 90° - \frac{A}{2}, \quad B'' = 90° - \frac{B}{2}, \quad C'' = 90° - \frac{C}{2}.$$

4. Cînd vîrful A descrie arcul BAC, unghiul A rămîne constant, deci și unghiul $A'' = 90° - \frac{A}{2}$ rămîne constant, iar laturile $A''B'$ și $A''C'$ ale unghiului rămîn tangente la cerc, deci punctul A'' descrie un arc de cerc situat pe un cerc concentric cu cercul dat (O).

I.20. *Să se afle aria unui trapez căruia i se cunosc lungimile tuturor laturilor.*

Aplicație: $a = 27{,}2$ m; $b = 18{,}75$ m; $c = 9{,}3$ m; $d = 10{,}8$ m.

Soluție. Fie $ABCD$ trapezul căutat, $AB = a$ = baza mare. $CD = b$ = baza mică, $AD = c$, $BC = d$. Paralela DE la BC taie baza mare AB în E, patrulaterul $DEBC$ este un paralelogram, deci $EB = DC = b$, $AE = AB - EB = a - b$.

În triunghiul ADE cunoaștem lungimile laturilor

$$\alpha = AE = a - b, \quad \beta = AD = c, \quad \gamma = DE = CB = d,$$

aria S a triunghiului este deci dată de formula

$$S^2 = p\,(p-\alpha)\,(p-\beta)\,(p-\gamma)$$

unde

$$p = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{a - b + c + d}{2},$$

deci

$$16S^2 = (a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)\,(a-b-c+d)\,(a-b+c-d).$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu h înălțimea DD' a triunghiului ADE, suprafața S a triunghiului este

$$S = \frac{AE \times DD'}{2} = \frac{(a-b)h}{2}, \quad 16S^2 = 4\,(a-b)^2h^2$$

şi egalînd cele două expresii ale lui $16S^2$, deducem valoarea lui h, care este şi înălţimea trapezului nostru, iar aria A a trapezului este dată de formula $A = \frac{(a+b)h}{2}$ în care înlocuim h cu valoarea găsită.

$$A=\{(a+b)/4\,(a-b)\}\sqrt{(a-b+c+d)(-a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)}$$

Aceasta este aria A a trapezului în funcţie de laturile sale a, b, c, d.

O altă metodă pentru determinarea lui h este următoarea: ducem perpendicularele CC' şi $DD' = h$. Din triunghiurile dreptunghice $AD'D$ şi $BC'C$ scoatem

$$AD'^2 = AD^2 - D'D^2, \quad C'B^2 = BC^2 - C'C^2,$$

$$AD' = \sqrt{c^2-h^2}, \qquad C'B = \sqrt{d^2-h^2}.$$

Însă $a = AB = AD' + D'C' + C'B$, iar $D'C' = DC = b$, urmează

$$a = \sqrt{c^2-h^2} + b + \sqrt{d^2-h^2},$$

adică necunoscuta h este rădăcină a ecuaţiei iraţionale

$$\sqrt{c^2-h^2} + \sqrt{d^2-h^2} = a-b,$$

care prin două ridicări succesive la pătrat devine

$$c^2 + d^2 - 2h^2 + 2\sqrt{(c^2-h^2)(d^2-h^2)} = (a-b)^2,$$

$$4(c^2-h^2)(d^2-h^2) = [(a-b)^2 - c^2 - d^2 + 2h^2]^2.$$

Dezvoltăm parantezele, reducem în ambele părţi termenii

$$4h^4 - 4(c^2 + d^2)h^2$$

şi mai rămîne

$$4c^2d^2 = (a-b)^4 + (c^2+d^2)^2 + 4h^2(a-b)^2 - 2(a-b)^2(c^2+d^2),$$

$$[2h(a-b)]^2 = (a-b+c+d)(-a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$$

şi am regăsit valoarea lui h determinată prin prima metodă.

În cazul particular al aplicației numerice, avem

$$a-b+c+d=28{,}55\text{ m}, \qquad a+b=45{,}95\text{ m},$$
$$-a+b+c+d=11{,}65\text{ m}, \qquad a-b=8{,}45\text{ m},$$
$$a-b-c+d=9{,}95\text{ m}, \qquad 4(a-b)=33{,}80\text{ m},$$
$$a-b+c-d=6{,}95\text{ m},$$

$$A=\frac{45{,}95}{33{,}8}\sqrt{28{,}55\times 11{,}65\times 9{,}95\times 6{,}95}$$

$$\lg A=\lg 45{,}95-\lg 33{,}8+\frac{1}{2}(\lg 28{,}55+\lg 11{,}65+\lg 9{,}95+$$
$$+\lg 6{,}95)=1{,}662\,29-1{,}528\,92+\frac{1}{2}(1{,}455\,61+1{,}066\,33+$$
$$+0{,}997\,82+0{,}841\,98).$$
$$\lg A=2{,}134\,24, \qquad A=206{,}181\,0\text{ m}^2.$$

I.21. *Printr-un punct M situat pe latura AB a unui pătrat dat $ABCD$, să se ducă o dreaptă MN astfel ca aria trapezului $AMND$ să fie egală cu o pătrime din aria pătratului.*

Soluție. Aria trapezului este $\frac{(AM+DN)\times AD}{2}$, iar aria pătratului, AD^2; prin ipoteză

$$(AM+DN)\times\frac{AD}{2}=\frac{AD^2}{4}, \text{ deci } AM+DN=\frac{AD}{2}=\frac{DC}{2}.$$

Egalitatea găsită spune că, dacă însemnăm prin E mijlocul laturii DC, deci $DE=\frac{DC}{2}$, avem $AM+DN=DE$ sau

$$AM+DN=DN+NE, \text{ deci } AM=NE;$$

dacă însemnăm cu P punctul de intersecție al dreptelor MN și AE, triunghiurile AMP și EPN sînt asemenea pentru că au unghiurile egale, raportul de asemănare fiind egal cu $\frac{AM}{NE}=1$, deci triunghiurile sînt egale și în particular $AP=PE$, adică P este mijlocul lui AE, de unde rezultă următoarea construcție geometrică: punctul M fiind dat, se unește M cu P și dreapta MP întîlnește latura DC în punctul căutat N.

Problema poate fi *generalizată*; dîndu-se punctul M pe latura AB, să determinăm pe latura opusă DC punctul N astfel ca aria trapezului $AMDN$ să fie egală cu $\frac{m}{2n}$ din suprafaţa pătratului. Pentru aceasta, determinăm pe latura DC punctul E astfel ca $\frac{DE}{DC} = \frac{m}{n}$, unim punctul A cu E, fie P mijlocul lui AE; dreapta MP taie latura DC în punctul căutat N. Într-adevăr, aria trapezului $AMDN$ este egală cu $(AM + DN) \times \frac{AD}{2} = (DN + NE) \times \frac{AD}{2} =$

$= DE \times \frac{AD}{2} = m \frac{AD}{n} \times \frac{AD}{2} = \frac{m}{2n} AD^2$, adică raportul dintre aria trapezului şi aria pătratului este egal cu $\frac{m}{2n}$, ceea ce trebuia demonstrat.

I.22. *Se dă triunghiul echilateral ABC, de latură a; se ia respectiv pe laturile BC, CA, AB, punctele A_1, B_1, C_1 astfel încît $BA_1 = CB_1 = AC_1 = \frac{a}{3}$. Prin intersecţiile dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 se formează triunghiul $A_2B_2C_2$.*

1. *Să se demonstreze relaţiile*

$\sphericalangle CBB_1 + \sphericalangle BCC_1 = 60°$, $\sphericalangle BA_2C = \sphericalangle CB_2A = \sphericalangle AC_2B = 120°$.

şi să se demonstreze că triunghiul $A_2B_2C_2$ este echilateral.

2. *Să se calculeze lungimile segmentelor $AA_1 = BB_1 = CC_1$.*

3. *Să se arate că*

$$BC_2 = CA_2 = AB_2 = A_2B_2 = B_2C_2 = C_2A_2,$$

$$C_2A_1 = A_2B_1 = B_2C_1 = \frac{A_2B_2}{3} = \frac{B_2C_2}{3} = \frac{C_2A_2}{3}.$$

4. *Să se calculeze aria triunghiului $A_2B_2C_2$.*

Soluţie. 1. Triunghiurile BCB_1 şi CAC_1 sînt egale pentru că au un unghi egal cuprins între laturi egale:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle A = 60°, \quad BC = CA = a, \quad CB_1 = AC_1 = \frac{a}{3};$$

rezultă $\sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle ACC_1$, deci

$$\sphericalangle CBB_1 + \sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle ACC_1 + \sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle ACB = 60°.$$

În triunghiul BA_2C avem

$$\sphericalangle BA_2C = 180° - (\sphericalangle CBB_1 + \sphericalangle BCC_1) = 180° - 60° = 120°$$

şi, prin permutări circulare, $\sphericalangle CB_2A = \sphericalangle AC_2B = 120°$.

Triunghiul $A_2B_2C_2$ este echilateral pentru că are unghiurile egale cu 60°, fiecare unghi fiind suplimentar unui unghi de 120°, de exemplu unghiul din vîrful A_2 este suplimentul unghiului $BA_2C = 120°$.

2. Din triunghiurile egale AA_1B, BB_1C, CC_1A deducem $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Fie A' proiecția vîrfului A pe latura BC; dreapta AA' este înălțime și mediană în triunghiul echilateral ABC de latură a, deci $A'A = a\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$A_1A' = BA' - BA_1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$, iar din triunghiul dreptunghi $A_1A'A$ scoatem

$$AA_1^2 = AA'^2 + A_1A'^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{36} = \frac{7a^2}{9}.$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = a\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

3. Prin B_1 ducem paralela B_1DE la BC, care taie pe AA_1 în D și pe AB în E; triunghiurile AEB_1 și ABC sînt asemenea; rezultă

$$\frac{EB_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{2a}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{2}{3}, \quad EB_1 = \frac{2BC}{3} = \frac{2a}{3}$$

Dreptele concurente AB, AA_1, AC determină pe paralelele EDB_1 și BA_1C, segmente proporționale, adică

$$\frac{DB_1}{EB_1} = \frac{A_1C}{BC} = \frac{2}{3}, \text{ deci } DB_1 = \frac{2EB_1}{3} = \frac{4a}{9}.$$

Triunghiurile BC_2A_1 și DC_2B_1 sînt asemenea; rezultă

$$\frac{BC_2}{C_2B_1} = \frac{BA_1}{DB_1} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{4a}{9}} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{BC_2}{BC_2 + C_2B_1} = \frac{3}{3+4}, \quad BC_2 = \frac{3BB_1}{7} = \frac{a}{\sqrt{7}},$$

prin permutări circulare, $BC_2 = CA_2 = AB_2 = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

Triunghiurile A_1BC_2 și A_1AB sînt asemenea pentru că au unghiurile egale; rezultă

$$\frac{BC_2}{AB}=\frac{C_2A_1}{BA_1},\quad \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{7}}\right)}{a}=\frac{C_2A_1}{\frac{a}{3}},$$

$$C_2A_1=\frac{a}{3\sqrt{7}},\quad \text{adică}\quad C_2A_1=\frac{AB_2}{3},$$

iar prin permutări circulare, $A_2B_1=\frac{BC_2}{3}$, $B_2C_1=\frac{CA_2}{3}$.

Am găsit

$$BC_2=\frac{3BB_1}{7}\quad \text{și}\quad A_2B_1=\frac{BC_2}{3}=\frac{BB_1}{7},$$

rezultă $C_2A_2=BB_1-BC_2-A_2B_1=BB_1-\frac{3BB_1}{7}-\frac{BB_1}{7}=\frac{3BB_1}{7}$,

adică $BC_2=CA_2=AB_2=A_2B_2=B_2C_2=C_2A_2=\frac{3BB_1}{7}=\frac{a}{\sqrt{7}}$,

$$C_2A_1=A_2B_1=B_2C_1=\frac{A_2B_2}{3}=\frac{B_2C_2}{3}=\frac{C_3A_2}{3}=\frac{a}{3\sqrt{7}}.$$

4. Aria triunghiului $A_2B_2C_2$ este egală cu aria unui triunghi echilateral în care latura este egală cu $l=\frac{a}{\sqrt{7}}$, deci

$$A_1=l^2\frac{\sqrt{3}}{4}=a^2\frac{\sqrt{3}}{28}.$$

Dacă însemnăm cu $A=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ aria triunghiului dat ABC, deducem $A_1=\frac{A}{7}$, adică A_1 este egală cu a șaptea parte din A.

Observații. 1. Operația prin care am obținut triunghiul T_1, adică $A_2B_2C_2$, din triunghiul T, adică ABC, poate fi repetată asupra triunghiului T_1 și obținem triunghiul T_2, fie A_2 aria lui, și așa mai departe, din aproape în

aproape, obținem triunghiul T_n, fie A_n aria lui. Între ariile acestor triunghiuri succesive avem relațiile

$$A_1 = \frac{A}{7}, \quad A_2 = \frac{A_1}{7}, \ldots, \quad A_n = \frac{A_{n-1}}{7},$$

deci $A_n = \dfrac{A}{7^n}$ și $A_n \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Triunghiurile T, T_1, T_2, ... , T_n au același centru de greutate, pentru că vîrfurile fiecăruia împart în același raport laturile triunghiului precedent, urmează că triunghiul T_n tinde către centrul de greutate al triunghiului inițial ABC.

2. Suma ariilor triunghiurilor T, T_1, T_2, ..., T_n este

$$A + \frac{A}{7} + \frac{A}{7^2} + \ldots + \frac{A}{7^n} = A\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{7^n}\right) =$$

$$= A\,\frac{\dfrac{1}{7^{n+1}} - 1}{\dfrac{1}{7} - 1} = A\,\frac{7 - \dfrac{1}{7^n}}{6}$$

și, cînd $n \to \infty$, această sumă tinde către $\dfrac{7A}{6}$.

3. Problema poate fi generalizată luînd în locul triunghiului echilateral ABC, un triunghi ABC oarecare și, în locul raportului

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{1}{2},$$

un raport λ oarecare; putem schimba chiar raportul λ cînd trecem de la un triunghi la triunghiul următor, adică definim triunghiul T_1 cu ajutorul triunghiului T și raportului λ, apoi triunghiul T_2 cu ajutorul triunghiului T_1 și raportului λ_1 etc.

I.23. *Se dă un triunghi ABC și pe latura BC se consideră punctele D și E astfel ca*

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ACB \quad \text{și} \quad \sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC.$$

1. *Să se calculeze $\sphericalangle DAE$.*
2. *Să se arate că $AD = AE$.*
3. *Să se demonstreze relațiile*

$$AB^2 = BC \times BD; \quad AC^2 = BC \times CE; \quad AD^2 = BD \times EC.$$

4. *Să se arate cum se poate construi triunghiul ABC cînd se cunosc laturile AB și AC și segmentele $AD = AE$.*

Soluție. 1. În vîrful A s-au format trei unghiuri pe care le însemnăm

$$A_1 = \sphericalangle BAD,\ A_2 = \sphericalangle DAE,\ A_3 = \sphericalangle EAC;$$

fie D și E celelalte două unghiuri în triunghiul DAE.

Din construcție rezultă

$$A_1 = C,\quad A_3 = B;$$

$$D = A_1 + B = C + B,\quad E = A_3 + C = B + C$$

deci $D = E$, adică triunghiul DAE este isoscel.

$$\sphericalangle DAE = A_2 = A - A_1 - A_3 = A - C - B = 180^\circ - 2(B + C).$$

2. Triunghiul DAE fiind isoscel, $AD = AE$.

3. Triunghiurile BAD și BCA sînt asemenea pentru că au unghiurile egale; rezultă

$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{CA} = \frac{BD}{AB},$$

$$AB^2 = BC \times BD.$$

Triunghiurile ABC și EAC sînt asemenea pentru că au unghiurile egale, deci

$$\frac{AB}{EA} = \frac{BC}{AC} = \frac{CA}{CE},$$

$$AC^2 = BC \times CE.$$

Triunghiurile ADB și CEA sînt asemenea pentru că au unghiurile egale, deci

$$\frac{AD}{CE} = \frac{DB}{EA} = \frac{BA}{AC},$$

și, dacă ținem seama de $AE = AD$,

$$AD^2 = BD \times EC.$$

4. În egalitatea

$$\frac{AD}{CE} = \frac{BA}{AC}$$

stabilită la 3, cunoaștem lungimile segmentelor AD, BA, AC, deci putem determina lungimea segmentului CE, care este a

patra proporțională. Construim triunghiul ACE ale cărui laturi le cunoaștem, AC și AE date, iar CE determinată mai sus.

În triunghiul ACE astfel construit, prelungim latura CE pînă taie cercul cu centrul în A și raza egală cu lungimea dată AB, în punctul B; triunghiul ABC este triunghiul cerut.

I.24. *Se dă triunghiul ABC în care $AC = 2AB$.*

1. *Să se arate că bisectoarea AD este perpendiculară pe mediana BE.*

2. *Fie M mijlocul laturii BC; să se arate că mediana MN în triunghiul AME este perpendiculară pe mediana BE.*

3. *Fie I punctul de intersecție al bisectoarei AD cu mediana BE; F punctul de intersecție al dreptei CI cu latura AB; H intersecția dreptei ME cu CF. Să se arate că triunghiurile BIF și EHI sînt egale; să se deducă valoarea raportului $\frac{FA}{FB}$.*

4. *Să se construiască triunghiul ABC în care se cunosc laturile AB, $AC = 2AB$ și se știe că bisectoarea AD, mediana BE și înălțimea CF sînt concurente în punctul I.*

Să se generalizeze în cazul cînd AB și AC sînt oarecare.

Soluție. 1. E este mijlocul laturii AC, deci $AE = AB$, triunghiul BAE este isoscel și bisectoarea AD este mediană și înălțime, deci $BI = IE$ și AI perpendiculară pe BE.

2. ME unește mijloacele laturilor BC și AC, deci ME este paralelă cu BA și egală cu

$$\frac{BA}{2} = \frac{EA}{2} = EN,$$

deci triunghiul MEN este isoscel. Însă

$$\sphericalangle MEB = \sphericalangle EBA$$

ca alterne interne;

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle AEB$$

în triunghiul isoscel BAE, deci EB este bisectoarea unghiului MEN. Însă în trunghiul isoscel MEN, bisectoarea EB este mediană și înălțime, deci EB este perpendiculară pe MN.

3. Triunghiurile BFI și EHI au unghiurile egale pentru că laturile BF și EH sînt paralele, iar celelalte laturi respectiv în prelungire, triunghiurile sînt deci asemenea: însă $BI = IE$

(v. 1), raportul de asemănare este egal cu 1, deci triunghiurile sînt egale. În particular $FB = HE$, deci

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF}{EH} = \frac{AC}{EC} = 2.$$

4. Se construieşte latura AB, pe care se determină punctul F astfel ca $\frac{AF}{FB} = 2$; perpendiculara FC, ridicată în F pe AB, taie cercul cu centrul în A şi raza egală cu $AC = 2AB$, în punctul C.

Pentru construcţia triunghiului ABC, în cazul general în care raportul $\frac{AC}{AB}$ este un număr oarecare, propunem să se stabilească teorema următoare:

Dacă într-un triunghi ABC, bisectoarea AD, mediana BE şi înălţimea CF sînt concurente, să se demonstreze că, între unghiurile A, B, C şi laturile a, b, c ale triunghiului, există relaţia

$$\cos A = \frac{c}{b + c}.$$

Rezultă din această teoremă că:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{AB},$$

egalitate care determină poziţia punctului F pe latura AB; perpendiculara în F pe AB taie cercul cu centrul în A şi raza egală cu AC, în punctul C.

I.25. *Printr-un punct I situat pe bisectoarea unui unghi cu vîrful în A se duce o dreaptă variabilă care taie laturile unghiului în punctele M şi N. Perpendiculara pe bisectoare taie aceleaşi laturi respectiv în B şi C. Prin I se duce şi o paralelă la AB care taie pe AC în P. Să se arate că:*

1. *Din asemănarea triunghiurilor AMN şi PIN rezultă*

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{IP} = \text{constant}.$$

2. $\frac{\text{Aria } \Delta\, AMN}{AM \times AN} = \text{constant} = \frac{AI \times IC}{AB^2}.$

3. *Dacă* $\sphericalangle A = 60°$, *avem* $AC = 2IC$; *să se construiască în acest caz dreapta* MN *care trece prin* I, *astfel ca aria triunghiului* AMN *să fie dublul ariei triunghiului* ABC (se va observa că suma și produsul segmentelor AM și AN sînt cunoscute).

Soluție. 1. Să considerăm cazul general cînd AI este o dreaptă oarecare; dacă P' este punctul de intersecție al lui AB cu paralela dusă prin I la AC, avem

$$\frac{IM}{MN} = \frac{IP'}{AN}\,; \quad \frac{IN}{MN} = \frac{IP}{AM}\,, \tag{1}$$

de unde

$$\frac{IP}{AM} + \frac{IP'}{AN} = \frac{IM + IN}{MN} = 1.$$

Dacă AI este bisectoarea unghiului A, avem $IP = IP' = \frac{AB}{2}$ și prin urmare

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{IP} = \frac{2}{AB} = \text{constant}.$$

Pentru bisectoarea exterioară se obține, dacă $AM < AN$, relația analogă

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} = \frac{1}{IP}.$$

Observații: 1. Cînd punctul I descrie o dreaptă AI, raportul $\frac{IP}{IP'} = k$ (constant); reciproc, locul geometric al punctelor I care satisfac egalitatea

$$\frac{1}{AM} + \frac{k}{AN} = \frac{1}{IP}$$

este o dreaptă (IP fiind dat, punctele M, I se spune că se corespund omograf c).

2. Dacă în relațiile (1) facem $IP = IP'$, obținem prin împărțire $\frac{MI}{IN} = \frac{AM}{AN}$, adică teorema bisectoarei.

2. Dacă notăm cu d distanța lui I la cele două laturi ale unghiului A, avem

$$\frac{\text{aria } AMN}{AM \times AN} = \frac{d}{2} \times \frac{AM + AN}{AM \times AN} = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}\right) = \frac{d}{AB} =$$

$$= \frac{\text{aria } ABC}{AB^2} = \frac{AI \times IC}{AB^2} = \text{constant},$$

căci rapoartele $\frac{AI}{AB}$ și $\frac{IC}{AB}$ sînt constante, cînd I descrie bisectoarea unghiului A. Este ușor de văzut că valoarea constantei este $\frac{1}{2}\sin A$.

3. Dacă $\sphericalangle A = 60°$, triunghiul CIP este echilateral, iar P fiind mijlocul lui AC, rezultă

$$IC = CP = \frac{AC}{2}.$$

Dacă aria AMN = 2 aria ABC, relația de la punctul 2 ne dă

$$AM \times AN = 2AB^2,$$

iar din relația de la punctul 1, obținem

$$AM + AN = 4AB.$$

Construcția dreptei echivalează cu determinarea segmentelor AM și AN, a căror sumă și produs le cunoaștem.

I.26. *Se dau trei cercuri* (A), (B), (C) *concentrice de rază* $a > b > c$; *într-un punct* T *situat pe cercul* (C) *se duce tangenta la acest cerc, fie* A *și* B *punctele în care această tangentă taie cercurile* (A) *și* (B), *punctul* T *fiind situat între punctele* A *și* B. *Fie* C *punctul diametral opus lui* T *în cercul* (C).

1. *Să se calculeze aria* S *a triunghiului* ABC *în funcție de* a, b, c.

2. *Razele* a *și* c *fiind date, să se determine grafic sau prin calcul valoarea lui* b, *astfel ca triunghiul* ABC *să fie isoscel.*

3. *Razele* a *și* b *fiind date, să se determine grafic sau prin calcul valoarea lui* c, *astfel ca aria* S *să fie maximă.*

Soluție. 1. Fie O centrul comun al celor trei cercuri; în triunghiul dreptunghi OTA avem $OA = a$, $OT = c$, deci

$$TA^2 = OA^2 - OT^2, \quad TA = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

La fel, în triunghiul dreptunghi OTB, $OB = b$; $OT = c$,

$$TB^2 = OB^2 - OT^2, \quad TB = \sqrt{b^2 - c^2},$$

$$AB = AT + TB = \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}.$$

În triunghiul ACB cunoaștem baza AB și înălțimea $CT = 2c$, deci aria triunghiului ABC este $S = AB \times \frac{CT}{2}$.

$$S = c\left(\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}\right).$$

2. Razele a şi c fiind date, vîrfurile A şi C sînt cunoscute; problema se reduce la determinarea unui punct B, pe prelungirea dreptei AT, pentru că prin ipoteză punctul T este situat între A şi B, astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel. Însă un triunghi poate să fie isoscel în trei feluri, după cum asociem laturile $AB = BC$ sau $BC = CA$ sau $CA = AB$.

În primul caz $AB = BC$, punctul B se determină grafic la intersecţia dreptei TA', unde A' este al doilea punct de intersecţie al cercului (A) cu tangenta în T la cercul (C), cu perpendiculara ridicată pe AC în mijlocul B' al laturii AC, pentru că în triunghiul isoscel ABC, mediana BB' este şi înălţime.

Pentru ca problema să fie posibilă în condiţia $b < a$, trebuie ca $OB = b < a = OA'$, adică $TB < TA'$, adică punctul B trebuie să fie situat între T şi A'.

În al doilea caz, $BC = CA$, înălţimea TC trebuind să fie şi mediană, trebuie să avem $AT = TB$, adică punctul B trebuie să coincidă cu A'; dar în acest caz, $b = OB = OA' = a$, adică $b = a$, egalitate contrară ipotezei $b < a$, deci cazul al doilea este exclus.

În al treilea caz, $CA = AB$, punctul B se determină grafic prin intersecţia dreptei TA' cu cercul cu centrul în A şi raza AC. Şi aici problema este compatibilă cu ipoteza $b < a$, dacă punctul B este situat între T şi A'.

În triunghiul dreptunghi BTC avem $BT = \sqrt{b^2 - c^2}$, $TC = 2c$, deci

$$BC^2 = BT^2 + TC^2 = b^2 - c^2 + 4c^2, \quad BC = \sqrt{3c^2 + b^2}.$$

Din triunghiul dreptunghi ATC deducem prin analogie

$$AC = \sqrt{3c^2 + a^2}.$$

În cazul I, $AB = BC$, avem

$$\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{3c^2 + b^2},$$

$$a^2 - c^2 + b^2 - c^2 + 2\sqrt{(a^2 - c^2)\ (b^2 - c^2)} = 3c^2 + b^2,$$

$$2\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} = 5c^2 - a^2,$$

$$b^2 = c^2 + \frac{(5c^2 - a^2)^2}{4(a^2 - c^2)}.$$

Această ecuaţie defineşte pe b în funcţie de a şi c; se vede că $b^2 > c^2$, adică $b > c$. Pentru ca problema să fie posibilă, mai

trebuie să avem $a > b$ sau $a^2 > b^2$, adică

$$a^2 > c^2 + \frac{(5c^2 - a^2)^2}{4(a^2 - c^2)},\quad 4(a^2 - c^2)^2 > (5c^2 - a^2)^2,$$

$$2(a^2 - c^2) > 5c^2 - a^2,\quad 7c^2 < 3a^2,\quad a > c\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

În al treilea caz, $CA = AB$, avem

$$\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{3c^2 + a^2},$$

$$b^2 - c^2 = 3c^2 + a^2 + a^2 - c^2 - 2\sqrt{(3c^2 + a^2)(a^2 - c^2)},$$

$$b^2 = 3c^2 + 2a^2 - 2\sqrt{(3c^2 + a^2)(a^2 - c^2)}.$$

Această ecuație definește pe b în funcție de a și c; se verifică ușor că $b^2 > c^2$, adică $b > c$. Condiția $a > b$ este îndeplinită dacă

$$a^2 > 3c^2 + 2a^2 - 2\sqrt{(3c^2 + a^2)(a^2 - c^2)},$$

$$a^2 + 3c^2 < 2\sqrt{(3c^2 + a^2)(a^2 - c^2)}.$$

iar prin ridicare la pătrat și simplificare,

$$a^2 + 3c^2 < 4(a^2 - c^2),\quad 3a^2 > 7c^2,\quad a > c\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

În rezumat, dacă $c < b < a$, triunghiul ABC este isoscel în primul și al treilea caz cînd este îndeplinită condiția

$$a > c\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

3. Razele a și b fiind date, să determinăm pe c astfel ca aria S a triunghiului ABC, calculată la punctul 1, să fie maximă. Dacă însemnăm cu x raza cercului variabil (C) și cu y aria S, vom căuta maximul funcției

$$y = x\left[\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2}\right].$$

Calculăm primele două derivate,

$$y' = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{b^2 - 2x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

$$y'' = \frac{2x^3 - 3a^2x}{(a^2 - x^2)^{3/2}} + \frac{2x^3 - 3b^2x}{(b^2 - x^2)^{3/2}}.$$

Funcția y este staționară pentru valorile lui x care verifică ecuația $y' = 0$; deducem ecuația

$$(a^2 - 2x^2)\sqrt{b^2 - x^2} = -(b^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2},$$

iar prin ridicarea la pătrat și reducerea termenilor asemenea,

$$a^2b^2 - x^2(a^2 + b^2) = 0, \quad x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Valoarea căutată pentru c este $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; observăm mai întîi că raportul $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$, deci evident $0 < c < b$ și a fortiori

$$c < a.$$

Dacă înlocuim în y'' pe x cu valoarea c, numitorii sînt pozitivi, iar numărătorii celor două fracții devin

$$c(2c^2 - 3a^2) = -c\frac{(3a^4 + a^2b^2)}{(a^2 + b^2)} < 0,$$

$$c(2c^2 - 3b^2) = -c\frac{(3b^4 + a^2b^2)}{(a^2 + b^2)} < 0,$$

deci pentru $x = c$ avem $y'' < 0$ și funcția y este efectiv maximă pentru $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

I.27. *În triunghiul ABC se notează unghiurile cu A, B, C, și laturile cu a, b, c și se presupune că $A = 2B$.*

1. Să se calculeze unghiurile A, B, C cînd triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghi.

2. Punctul D fiind intersecția bisectoarei interioare a unghiului A cu latura BC, să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu latura AB.

3. Să se arate că latura CA este medie proporțională între latura BC și segmentul DC.

4. Să se construiască triunghiul ABC cînd se dau laturile b, c și relația $A = 2B$.

Soluție. 1. Un triunghi ABC poate să fie isoscel în trei moduri, după cum $A = B$ sau $B = C$ sau $C = A$; primul caz este imposibil pentru că prin ipoteză $A = 2B$, rămîn cazurile $B = C$ sau $C = A$.

Dacă $B = C$, deducem din ecuațiile $A = 2B$ și $A + B + C = 180°$, ecuația $2B + B + B = 180°$ sau $B = 45°$, deci

$$A = 90°, \quad B = 45°, \quad C = 45°,$$

adică triunghiul BAC este și isoscel și dreptunghi.

Dacă $C = A$, deducem din ecuațiile $A = 2B$ și $A + B + C = 180°$, ecuația $2B + B + 2B = 180°$ sau $B = 36°$, deci

$$A = 72°, \quad B = 36°, \quad C = 72°.$$

Un triunghi ABC poate fi dreptunghi, după cum $A = 90°$ sau $B = 90°$ sau $C = 90°$; cazul $A = 90°$ a fost studiat mai sus și cazul $B = 90°$ este imposibil, pentru că din $A = 2B$ am deduce $A = 180°$, rămîne deci cazul $C = 90°$.

Din ecuațiile $C = 90°$, $A = 2B$, $A + B + C = 180°$, deducem $2B + B + 90° = 180°$ sau $B = 30°$, deci

$$A = 60°, \quad B = 30°, \quad C = 90°.$$

2. Din ipoteza $A = 2B$ rezultă că bisectoarea AD împarte unghiul A în două unghiuri A_1 și A_2 egale cu B,

$$A_1 = \sphericalangle BAD = A_2 = \sphericalangle DAC = B.$$

Unghiul ADC, fiind exterior triunghiului ADB, este egal cu suma unghiurilor $A_1 + B = 2B$, deci bisectoarea DE a acestui unghi ADC îl împarte în două unghiuri D_1 și D_2 egale cu B,

$$D_1 = \sphericalangle ADE = D_2 = \sphericalangle EDC = B.$$

Unghiurile alterne interne A_1 și D_1 fiind egale, dreptele AB și DE sînt paralele.

3. Triunghiurile BAC și ADC sînt asemenea pentru că au unghiurile respectiv egale cu B, $2B$, C; rezultă că laturile lor sînt proporționale, adică

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

și din ultima egalitate deducem $AC^2 = BC \times DC$, adică latura AC este egală cu media geometrică a laturilor BC și DC.

4. Fie D' și C' proiecțiile punctelor D și C pe latura AB; triunghiul ADB fiind isoscel, pentru că $A_1 = B$, înălțimea DD', este și mediană, adică $AD' = D'B = \frac{c}{2}$.

Pentru a calcula lungimea segmentului $C'D'$, observăm că

$$\frac{C'D'}{D'B} = \frac{CD}{BD}.$$

Pe de altă parte, în triunghiul BAC, bisectoarea AD împarte latura opusă CB în raportul

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Din ultimele egalități scoatem $\frac{C'D'}{D'B} = \frac{b}{c}$; dar $D'B = \frac{c}{2}$, deci $C'D' = \frac{b}{2}$ de unde rezultă următoarea construcție a triunghiului ABC: pe latura $AB = c$ se determină mijlocul D' și apoi pe segmentul $D'A$ punctul C' astfel ca $C'D' = \frac{b}{2}$; se ridică perpendiculara $C'C$ pe AB, iar vîrful C este la intersecția acestei perpendiculare cu cercul cu centrul în A și raza egală cu b. Problema este posibilă dacă $AC \geqslant AC' = AD' - C'D'$ sau

$$b \geqslant \frac{c}{2} - \frac{b}{2} \; ; \quad c \leqslant 3b.$$

Triunghiul ABC, în care $A = 2B$, are laturile legate printr-o relație simplă. Într-adevăr, de la punctul 3 deducem

$$DC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{b^2}{a}, \quad DB = CB - CD = a - \frac{b^2}{a},$$

iar raportul $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, devine

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \frac{b}{c} \text{ sau } a^2 = b^2 + bc.$$

Observație. Relația $a^2 = b(b+c)$ poate fi stabilită și pe cale trigonometrică pornind de la teorema sinusurilor, care în cazul nostru este

$$\frac{a}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin 3B}.$$

I.28. *Se consideră un cerc cu centrul în O, două puncte A și M pe acest cerc și un punct B pe tangenta în A la cerc. Paralela*

în B la OA întîlnește perpendiculara MT pe OA în N, iar cercul cu centrul O și raza ON întîlnește pe OA în P. În sfîrșit, perpendiculara în P pe OA și paralela din M la OA se întîlnesc în Q. Să se arate:

1. *Aplicînd de mai multe ori teorema lui Pitagora, că $OQ = OB$,*

2. *Să se afle locul punctului Q cînd A și B rămîn fixe, iar M descrie cercul O.*

3. *S fiind intersecția dreptelor NP și MQ, iar R intersecția dreptelor BQ și OA, avem*

$$\frac{AP}{PR} = \frac{SM}{SQ}.$$

4. *Să se deducă de aici că dreptele AM, PN, BQ sînt concurente.*

Soluție. 1. Fie $OA = r$, $TM = m$, $AB = a$, $ON = R$, avem

$$R^2 = ON^2 = OT^2 + TN^2 = (r^2 - m^2) + a^2,$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = r^2 + a^2$$

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2 = R^2 + m^2 = (r^2 - m^2 + a^2) + m^2 = a^2 + r^2,$$

Deci

$$OB^2 = OQ^2 = a^2 + r^2.$$

2. Locul geometric al punctului Q este cercul cu centrul în O și raza $OQ = \sqrt{a^2 + r^2}$.

3. Fie V intersecția dreptelor AB și MQ; din triunghiurile asemenea BVQ și PQR avem

$$\frac{VQ}{PR} = \frac{BQ}{QR} = \frac{BV}{PQ}, \text{ sau } \frac{AP}{PR} = \frac{BV}{VA},$$

iar în triunghiurile asemenea SMN și SQP,

$$\frac{SM}{SQ} = \frac{MN}{PQ} = \frac{BV}{VA};$$

din ultimele două șiruri de egalități deducem

$$\frac{AP}{PR} = \frac{SM}{SQ} = \frac{BV}{VA}. \qquad (1)$$

4. Demonstrația se face prin reducere la absurd, adică presupunînd că dreptele PN, BQ se taie în punctul U, iar AM

și PN în alt punct U'. Din relația (1) scoatem

$$\frac{PR}{SQ} = \frac{AP}{SM}. \qquad (2)$$

Considerînd triunghiul UQS, avem $\frac{PR}{SQ} = \frac{UP}{US}$;

Considerînd triunghiul $U'SM$, avem $\frac{AP}{SM} = \frac{U'P}{U'S}$.

Conform relației (2), rezultă $\frac{UP}{US} = \frac{U'P}{U'S}$, adică punctele U și U' coincid, deci cele trei drepte AM, PN, BQ sînt concurente.

I.29. *Se dau două cercuri cu centrele în O și O' și care se întîlnesc în două puncte A și B; se duce diametrul MON paralel cu $O'A$ și diametrul $M'O'N'$ paralel cu OA, punctele M, M', A fiind de aceași parte a dreptei OO'. Se cere:*

1. *Să se arate că triunghiurile MOA și $M'O'A$ sînt asemenea; la fel triunghiurile NOA și $N'O'A$.*

2. *Să se deducă că dreptele AM și AM' sînt în prelungire și că dreptele AN și AN' sînt confundate.*

3. *Dreptele ANN' și MAM' sînt bisectoarele, interioară și exterioară ale unghiului OAO'.*

Soluție. 1. $\sphericalangle MOA = \sphericalangle M'O'A$, avînd laturile paralele, deci triunghiurile isoscele MOA și $M'O'A$ sînt asemenea.

La fel, triunghiurile isoscele NOA și $N'O'A$ sînt asemenea.

2. Demonstrația se face prin reducere la absurd; presupunem că prelungirea lui MA nu este AM', ci AM''.

$\sphericalangle OMA = \sphericalangle O'AM''$, ca unghiuri corespondente formate de paralelele OM și $O'A$ tăiate de secanta MAM''.

$\sphericalangle OMA = \sphericalangle O'AM'$ în triunghiurile isoscele asemenea de la 1.

Rezultă $\sphericalangle O'AM'' = \sphericalangle O'AM'$, deci dreptele AM'' și AM' coincid, adică MA și AM' sînt în prelungire.

Triunghiurile dreptunghice MAN și $M'AN'$ sînt asemenea pentru că fiecare se descompune în două triunghiuri respectiv asemenea. Însă catetele AM și AM' fiind în prelungire, celelalte catete AN și AN' sînt confundate.

3. $\sphericalangle OAN = \sphericalangle O'AN'$ în triunghiurile isoscele asemenea de la 1. Însă dreptele AN și AN' fiind confundate, dreapta ANN' este bisectoarea interioară a unghiului OAO'.

Dreapta MAM', fiind perpendiculară pe bisectoarea interioară ANN', este bisectoarea exterioară a unghiului OAO'.

Generalizare. *Fie O și O' două cercuri secante în A și B, iar T intersecția tangentelor comune; un punct P descrie cercul ABT. Fie MON și $M'O'N'$ diametrele paralele respectiv cu dreptele PO' și PO (M și M' fiind de aceeași parte a dreptei OO').*

1. *Să se arate că triunghiurile MOP și $M'O'P$ sînt asemenea; la fel triunghiurile NOP și $N'O'P$.*

2. *S și S' fiind intersecțiile dreptelor PO și PO' cu cercurile O și O' (S, S', P fiind de aceeași parte a dreptei OO'), să se arate că dreptele MS și $M'S'$ sînt paralele; la fel dreptele NS și $N'S'$.*

3. *Dreptele PN și PN' sînt isogonale în unghiul OPO'; la fel dreptele PM și PM'.*

Soluție. 1. Tangenta comună $LL'T$ la cele două cercuri atinge cercurile în L și L'; triunghiurile dreptunghice OLT, $O'L'T$ sînt asemenea, deci

$$\frac{TO}{TO'} = \frac{OL}{O'L} = \frac{OA}{O'A}.$$

urmează că AT este bisectoarea exterioară a unghiului OAO'.

Linia centrelor OO' taie cercul ABT în T și T', $\sphericalangle TAT' = 90°$ pentru că TT' este un diametru, rezultă că AT' este bisectoarea interioară a unghiului OAO'.

Rezultă că punctele O, T', O', T formează o diviziune armonică, de asemenea fasciculul $P(OT'O'T)$ este armonic. În acest fascicul, razele PT și PT' fiind perpendiculare, sînt bisectoarele unghiului OPO'. Rezultă

$$\frac{T'O}{T'O'} = \frac{OP}{O'P} = \frac{OA}{O'A} = \frac{OM}{O'M'},$$

adică $\frac{OP}{O'P} = \frac{OM}{O'M'}$; în plus, $\sphericalangle MOP = \sphericalangle M'O'P$ avînd laturile paralele, deci triunghiurile MOP și $M'O'P$ sînt asemenea.

La fel $\frac{OP}{O'P} = \frac{ON}{O'N'}$ și $\sphericalangle NOP = \sphericalangle N'O'P$, deci triunghiurile NOP și $N'O'P$ sînt asemenea.

2. Triunghiurile MOS și $M'O'S$ fiind isoscele și avînd un unghi egal ($\sphericalangle MOS = \sphericalangle M'O'S'$ avînd laturile paralele), rezultă

$$\sphericalangle OMS = \sphericalangle OSM = \sphericalangle O'M'S'.$$

Cum însă $O'M'$ și OS sînt paralele, rezultă că și dreptele MS și $M'S'$ sînt paralele.

Dreptele NS și MS sînt perpendiculare, la fel $N'S'$ și $M'S'$, deci NS și $N'S'$ sînt paralele.

3. De la 1 rezultă $\sphericalangle NPO = \sphericalangle N'PO'$, deci dreptele NP și PN' sînt isogonale în unghiul OPO'.

La fel pentru dreptele PM și PM'.

Caz particular. Enunțul dat corespunde cazului în care punctul P coincide cu A; prin această particularizare, rezultatele obținute în cazul general devin:

1. Triunghiurile MOA și $M'O'A$ sînt asemenea; la fel triunghiurile NOA și $N'O'A$.

2. Punctele P, A, S, S' coincid, deci dreptele MA și $M'A$ sînt paralele, adică dreptele MA și AM' sînt în prelungire.

Dreptele NA și MA sînt perpendiculare; la fel $N'A$ și $M'A$, rezultă din 1 că NA este paralelă cu $N'A$, care este perpendiculară pe MM', deci dreptele AN și AN' sînt în prelungire.

3. $\sphericalangle NAO = \sphericalangle N'AO'$, deci ANN' este bisectoarea interioară a unghiului OAO', iar MAM' bisectoarea exterioară.

I.30. *În triunghiul dreptunghi ACB, punctele D și E împart ipotenuza AB în trei părți egale; să se arate că suma pătratelor construite pe laturile triunghiului CDE este egală cu două treimi din pătratul construit pe ipotenuza AB.*

Soluție. Teorema medianei spune că, într-un triunghi oarecare, pătratul unei laturi plus de patru ori pătratul medianei

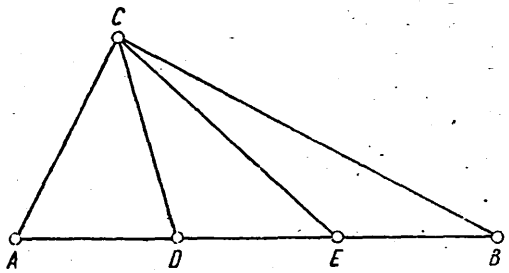


Fig. 9

corespunzătoare ei este egal cu de două ori suma pătratelor celorlalte două laturi. Aplicăm această teoremă la triunghiurile ACE și DCB și obținem (fig. 9)

$$AE^2 + 4DC^2 = 2(AC^2 + EC^2),$$
$$DB^2 + 4EC^2 = 2(DC^2 + BC^2).$$

Însă $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$;

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

$$AD = DE = EB = \frac{c}{3};$$

$$AE = DB = \frac{2c}{3}.$$

Făcînd suma celor două egalități și apoi înlocuirile, obținem

$$\frac{8c^2}{9} + 2(DC^2 + EC^2) = 2(b^2 + a^2),$$

$$2(DC^2 + CE^2 + ED^2) = 2\frac{2c^2}{3},$$

sau

$$DC^2 + CE^2 + ED^2 = 2\frac{AB^2}{3},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

I.31. *În triunghiul isoscel BAC, $AB = AC$, se cunoaște baza $BC = 2a$ și înălțimea $AD = h$. Se taie acest triunghi cu o dreaptă paralelă cu baza BC, la o distanță x de vîrful A. Fie E, F, I punctele în care această paralelă taie respectiv laturile AB, AC și înălțimea AD; fie O centrul cercului circumscris trapezului isoscel $BCFE$.*

1. *Să se calculeze aria trapezului $BCFE$ în funcție de a, h, x.*
2. *Să se arate că $\sphericalangle IFO + \sphericalangle DCO = \sphericalangle FOC$.*
3. *Dacă $\sphericalangle FOC = 90°$, să se arate că triunghiurile FOI și COD sînt egale; să se determine în acest caz distanța x în funcție de a și h.*
4. *Să se calculeze unghiurile triunghiului BAC cînd centrul O este și ortocentrul triunghiului BAC.*

Soluție. 1. Notăm $EF = 2b$; triunghiurile isoscele BAC și EAF sînt asemenea, deci bazele și înălțimile lor sînt proporționale.

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AD}{AI} \text{ sau } \frac{2a}{2b} = \frac{h}{x}, \text{ deci } b = \frac{ax}{h}.$$

Trapezul $BCFE$ are bazele $2a$ și $2b$, iar înălțimea $ID = h - x$, aria lui este deci

$$\frac{1}{2}(2a + 2b)(h - x) = a\frac{h^2 - x^2}{h}.$$

2. În triunghiurile dreptunghice OIF și ODC, unghiurile ascuțite sînt complementare, deci

$$\sphericalangle IFO + \sphericalangle IOF = 90°, \quad \sphericalangle DCO + \sphericalangle DOC = 90°,$$

de unde deducem prin adunare membru cu membru

$$\sphericalangle IFO + \sphericalangle IOF + \sphericalangle DCO + \sphericalangle DOC = 180°.$$

Însă suma unghiurilor formate în jurul punctului O, de aceeași parte a dreptei DI, este egală cu 180°,

$$\sphericalangle IOF + \sphericalangle FOC + \sphericalangle COD = 180°,$$

iar din ultimele două relații deducem, prin scădere membru cu membru,

$$\sphericalangle IFO + \sphericalangle DCO = \sphericalangle FOC,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

3. Dacă $\sphericalangle FOC = 90°$, rezultă din egalitatea stabilită la 2 că unghiurile IFO și DCO sînt complementare; însă în triunghiurile dreptunghice OIF și ODC, $\sphericalangle IFO$ este complementar cu $\sphericalangle IOF$ și $\sphericalangle DCO$ este complementar cu $\sphericalangle DOC$, rezultă

$$\sphericalangle IFO = \sphericalangle DOC \text{ și } \sphericalangle DCO = \sphericalangle IOF.$$

Triunghiurile dreptunghice IFO și ODC sînt egale pentru că au unghiurile ascuțite respectiv egale și ipotenuzele $OF = OC$ egale ca raze ale cercului O (fig. 10).

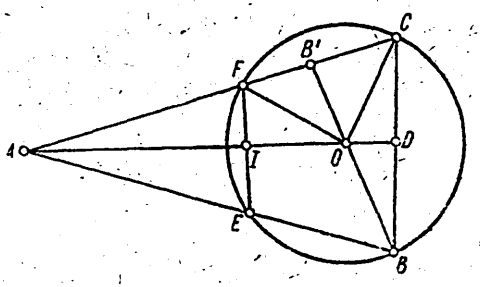


Fig. 10

Triunghiurile fiind egale, au catetele respectiv egale,

$$OI = DC = a, \quad IF = DO = b$$

$$h = DA = DO + OI + IA = b + a + x$$

și, dacă înlocuim în ultima ecuație pe b cu valoarea sa,

$$h = \frac{ax}{h} + a + x, \quad x = h\frac{h-a}{h+a}.$$

4. Dreapta BO prelungită taie latura AC în B'; prin ipoteză, O este ortocentrul triunghiului; deci BB' este înălțime în triunghi, adică BB' este perpendiculară pe AC; rezultă că

$$\sphericalangle OBD + \sphericalangle C = 90°.$$

În triunghiul isoscel BOC avem $\sphericalangle OBD = \sphericalangle OCD$, iar în triunghiul dreptunghic isoscel FOC, $\sphericalangle B'CO = 45°$. În sfîrșit, $C = \sphericalangle B'CO + \sphericalangle OCD$.

Din ultimele patru relații scoatem

$$\sphericalangle OCD + 45° + \sphericalangle OCD = 90°, \text{ deci } \sphericalangle OCD = 22°30',$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45° + 22°30' = 67°30', \quad \sphericalangle A = 45°.$$

I.32. *Tangentele în punctele A și B la un cerc de centru O se întîlnesc într-un punct C. Prin A se duce paralela la BC care întîlnește din nou cercul în D, iar dreapta CD întîlnește a doua oară cercul în E. În sfîrșit, AE întîlnește pe BC în F. Să se demonstreze că:*

1. $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle BCE$.
2. *Triunghiurile AFC și CFE sînt asemenea.*
3. $FC^2 = FE \times FA$.
4. $CF = FB$
5. *Cît trebuie să fie unghiul C pentru ca să avem* $AE = 2EF$.

Soluție. 1. Unghiurile CAE și ADE sînt egale pentru că au ca măsură jumătatea unghiului AOE; iar unghiurile ADE și BCE sînt egale ca alterne interne formate de paralelele AD și BC, tăiate de secanta DC.

2. Triunghiurile AFC și CFE sînt asemenea pentru că au două unghiuri egale: unghiul din F comun și, după cum am arătat la 1,

$$\sphericalangle CAF = \sphericalangle FCE.$$

3. Triunghiurile AFC și CFE, fiind asemenea, au laturile proporționale

$$\frac{AF}{CF} = \frac{FC}{FE} = \frac{CA}{EC},$$

iar din egalitatea primelor două rapoarte deducem

$$FC^2 = AF \times FE.$$

4. Puterea punctului F față de cercul O este

$$FE \times FA = FB^2$$

și, dacă ținem seama de egalitatea din 3, deducem $CF = FB$.

5. Tangentele duse din C la cerc sînt egale, $CA = CB$ (fig. 11); însă $CF = FB$, deci $CA = 2CF$, iar ultimele două rapoarte egale de la 3 dau

$$\frac{FC}{FE} = \frac{2CF}{EC}, \text{ deci } EC = 2FE.$$

Prin ipoteză, $AE = 2EF$, rezultă $AE = EC$, deci triunghiul AEC este isoscel; rezultă

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACE.$$

Însă la 1 am arătat că $\sphericalangle CAE = \sphericalangle FCE$, rezultă că dreapta CE este bisectoarea unghiului C, prin urmare dreapta CED

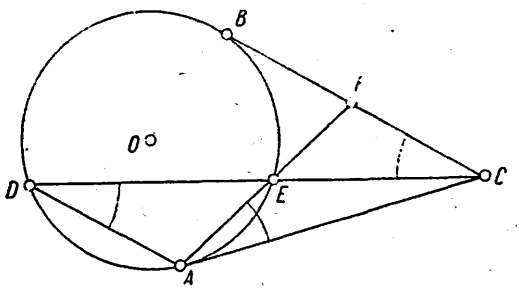


Fig. 11

trece prin centrul O al cercului, adică punctele E și D sînt diametral-opuse în cerc. În total am obținut

$$\alpha = \sphericalangle CAE = \sphericalangle ACE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle FCE,$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle ACE + \sphericalangle FCE = 2\alpha,$$

iar unghiul CEF, exterior triunghiului AEC, este egal cu $\alpha + \alpha = 2\alpha$.

Dacă facem suma

$$2\alpha + \alpha = \sphericalangle DEA + \sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \sphericalangle DOA + \frac{1}{2} \sphericalangle AOE =$$

$$= \frac{1}{2} \sphericalangle DOE = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ,$$

deci $\alpha = 30^\circ$ și unghiul

$$C = 2\alpha = 60^\circ.$$

I.33. *Fie A, B, C mijloacele laturilor triunghiului echilateral $A_1B_1C_1$; perpendiculara din B pe A_1B_1 taie cercul de diametru A_1B_1 în două puncte, iar perpendiculara din C pe A_1C_1 taie cercul de diametru A_1C_1 în alte două puncte* (fig. 12).

1. *Aceste patru puncte sînt situate pe un cerc. Să se afle centrul și raza lui.*

2. *Dacă P este un punct din planul triunghiului, expresia*

$$PB^2 + PC^2 - PA^2$$

este nulă, negativă sau pozitivă, după cum punctul P este pe cerc, interior sau exterior cercului.

3. *Generalizare pentru un triunghi $A_1B_1C_1$ oarecare.*

Soluție. 1. În triunghiul echilateral $A_1B_1C_1$, mediana B_1B este și înălțime, deci unghiul A_1BB_1 este drept, ceea ce revine a spune că punctul B se găsește pe cercul de diametru A_1B_1;

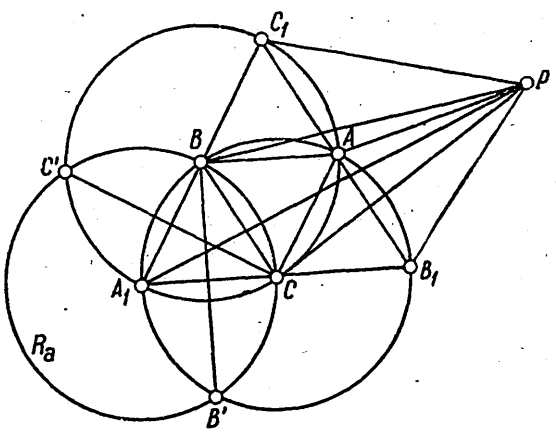


Fig. 12

perpendiculara din B pe diametrul A_1B_1 taie deci acest cerc în B și într-un alt punct B'. Coarda BB' fiind perpendiculară pe diametrul A_1B_1, este împărțită în părți egale de diametru, deci $A_1B = A_1B'$.

Se arată la fel că perpendiculara din C pe A_1C_1 taie cercul de diametru A_1C_1 în două puncte C și C' așa fel că $A_1C = A_1C'$.

Urmează că cele patru puncte B, B', C, C' sînt situate pe cercul cu centrul în A_1 și cu raza egală cu jumătatea laturii triunghiului echilateral $A_1B_1C_1$, fie R_a acest cerc.

2. Fie P un punct oarecare în plan; teorema medianei aplicată triunghiului PB_1C_1 dă

$$4PA^2 = 2\,(PB_1^2 + PC_1^2) - B_1C_1^2,$$

iar prin permutări circulare asupra literelor A, B, C obținem încă două egalități analoge, de unde deducem apoi

$$PB^2 + PC^2 - PA^2 = A_1P^2 - \frac{A_1B_1^2}{4} \qquad (1)$$

Dacă punctul P este situat pe cercul R_a, distanța sa A_1P la centru este egală cu raza $\frac{A_1B_1}{2}$ și în formula (1) partea a doua este nulă, deci și partea întîia este nulă, adică

$$PB^2 + PC^2 - PA^2 = 0.$$

Dacă punctul P este interior cercului R_a, distanța sa A_1P la centrul cercului este mai mică decît raza $\frac{A_1B_1}{2}$, deci în formula (1) partea a doua este negativă, deci și partea întîia este negativă, adică

$$PB^2 + PC^2 - PA^2 < 0.$$

Dacă punctul P este exterior cercului R_a, distanța sa A_1P la centrul cercului este mai mare decît raza $\frac{A_1B_1}{2}$, deci în formula (1) partea a doua este pozitivă, deci și partea întîia este pozitivă, adică

$$PB^2 + PC^2 - PA^2 > 0.$$

Teorema demonstrată se poate enunța astfel: *dacă ABC este un triunghi echilateral, locul geometric al punctului P din plan, care se bucură de proprietatea că pătratul distanței lui la vîrful A este egal cu suma pătratelor distanțelor lui la celelalte două vîrfuri B, C, este cercul R_a.*

În mod analog se definesc cercurile R_b și R_c; aceste trei cercuri au centrele respectiv în A_1, B_1, C_1 și sînt tangente două cîte două în C, A, B.

3. Presupunem că triunghiul $A_1B_1C_1$ este oarecare; fie A, B, C mijloacele laturilor lui și fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC.

Dacă P este un punct oarecare în planul triunghiului, teorema medianei aplicată triunghiului B_1PC_1 dă, cînd înlocuim pe B_1C_1 cu $2BC = 2a$,

$$4PA^2 = 2(PB_1^2 + PC_1^2) - 4a^2.$$

Prin permutări circulare asupra literelor A, B, C deducem din această relație încă două analoge,

$$4BP^2 = 2(PC_1^2 + PA_1^2) - 4b^2,$$

$$4PC^2 = 2(PA_1^2 + PB_1^2) - 4c^2,$$

iar din aceste trei relații, înmulțite respectiv cu $-1,1,1$, deducem

$$-PA^2 + BP^2 + PC^2 = PA_1^2 + a^2 - b^2 - c^2.$$

Pentru a transforma această relație în altă mai simplă, vom presupune pe rînd că unghiul A este mai mic sau mai mare sau egal cu un unghi drept.

Dacă $\sphericalangle A < 90°$, teorema generalizată a lui Pitagora, aplicată triunghiului ABC, spune că

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times (\text{proiecția lui } AC \text{ pe } AB).$$

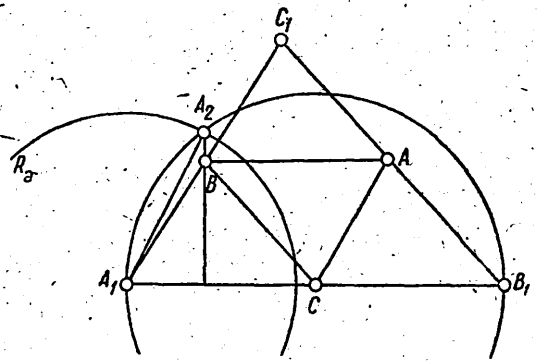


Fig. 13

Însă $2c = 2AB = A_1B_1$ și proiecția lui AC pe AB este egală cu proiecția lui A_1B pe A_1B_1, deci (fig. 13):

$$A_1B_1 \times (\text{proiecția lui } A_1B \text{ pe } A_1B_1) = -a^2 + b^2 + c^2.$$

Perpendiculara din B pe A_1B_1 taie cercul de diametru A_1B_1 în două puncte distincte, fie A_2 unul dintre ele; în acest cerc, pătratul coardei A_1A_2 este egal cu diametrul înmulțit cu proiecția coardei pe diametru, adică $A_1A_2^2$ este egal cu prima parte din ultima relație; rezultă

$$A_1A_2^2 = -a^2 + b^2 + c^2.$$

Dacă $\sphericalangle A = 90°$, avem $-a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Dacă $\sphericalangle A > 90°$, avem după teorema generalizată a lui Pitagora,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times (\text{proiecția lui } AC \text{ pe } AB).$$

Perpendiculara din B pe A_1B_1 taie cercul descris pe A_1B_1 ca diametru în două puncte imaginare, fie A_2 unul dintre ele, și

$$A_1A_2^2 = A_1B_1 \times (\text{proiecția lui } A_1B \text{ pe } A_1B_1) = a^2 - b^2 - c^2.$$

În rezumat, discuția de mai sus poate fi condensată astfel:

$$\sphericalangle A < 90°, \quad -PA^2 + PB^2 + PC^2 = PA_1^2 - A_1A_2^2. \quad (1)$$

$$\sphericalangle A = 90°, \quad -PA^2 + PB^2 + PC^2 = PA_1^2. \quad (2)$$

$$\sphericalangle A > 90°, \quad -PA^2 + PB^2 + PC^2 = PA_1^2 + A_1A_2^2. \quad (3)$$

Însemnăm cu R_a cercul cu centrul în vîrful A_1 și cu raza egală cu A_1A_2.

În cazul (1), cercul R_a există și relația (1) arată că

$$-PA^2 + PB^2 + PC^2 < 0, \text{ sau } = 0, \text{ sau } > 0$$

după cum:

$$A_1P < A_1A_2, \text{ sau } A_1P = A_1A_2, \text{ sau } A_1P > A_1A_2,$$

adică după cum punctul P este interior cercului R_a sau este situat pe cercul R_a sau este exterior cercului R_a.

În cazul (2), cercul R_a se reduce la centrul său A_1 pentru că raza sa $A_1A_2 = 0$ și ecuația (2) arată că

$$-PA^2 + PE^2 + PC^2 = 0 \text{ sau } > 0$$

după cum punctul P coincide cu centrul A_1 sau este diferit de centrul A_1.

În cazul (3), cercul R_a este imaginar și relația (3) arată că

$$-PA^2 + PB^2 + PC^2 > 0$$

pentru că prima parte este egală cu o sumă de două pătrate, oricare ar fi poziția punctului P în plan.

În mod analog se definește cercul R_b cu centrul în B_1 și raza B_1B_2 și apoi cercul R_c cu centrul în C_1 și raza C_1C_2.

Dacă unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC sînt ascuțite, toate trei cercurile R_a, R_b, R_c sînt reale.

Dacă unghiul A este drept, iar unghiurile B, C ascuțite, cercul R_a se reduce la punctul A_1, iar cercurile R_b și R_c sînt reale.

Dacă unghiul A este obtus, iar unghiurile B, C ascuțite, cercul R_a este imaginar, iar cercurile R_b și R_c sînt reale.

Un astfel de cerc poate fi definit ca locul geometric al punctului P din plan, care se bucură de proprietatea că pătratul distanței lui P la unul dintre vîrfurile triunghiului oarecare ABC este egal cu suma pătratelor distanțelor lui la celelalte două vîrfuri.

1.34. *Se dă un paralelogram $ABCD$ și se consideră cercul O circumscris triunghiului ABD, care mai întîlnește pe BC în E și pe CD în F. Dreapta BF întîlnește pe AD în G și DE pe AB în H. Dreptele BF și DE se întîlnesc în I, iar paralela prin G la AB întîlnește paralela prin H la AD în K* (fig. 14). *Să se arate că:*

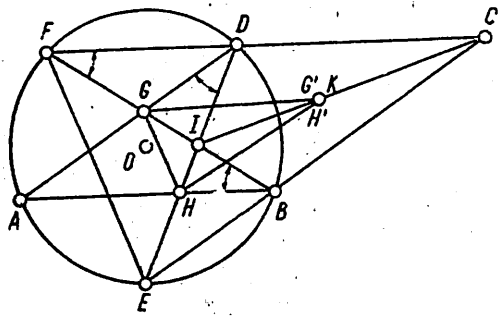


Fig. 14

1. *Triunghiurile BIE și DIF sînt asemenea.*
2. *Triunghiurile BIH și DIG sînt asemenea.*
3. *Dreptele EF și GH sînt paralele.*
4. *Punctele I, C și K sînt coliniare.*
5. *Punctele B, D, G, H sînt pe un cerc.*
6. *$AE = AF$.*

Soluție. 1. Coardele paralele AB și FD determină pe cerc arce egale, $\text{arc}\,AF = \text{arc}\,BD$; coardele paralele AD și EB determină pe cerc arce egale, $\text{arc}\,AE = \text{arc}\,BD$, deci

$$\text{arc}\,AF = \text{arc}\,AE = \text{arc}\,BD.$$

Triunghiurile BIE și DIF sînt asemenea pentru că unghiurile din I sînt egale ca opuse la vîrf, iar unghiurile din E și F sînt egale pentru că sînt înscrise în același arc BD; rezultă că laturile omoloage sînt proporționale

$$\frac{BI}{DI} = \frac{IE}{IF} = \frac{EB}{FD}. \tag{1}$$

2. Triunghiurile BIH și DIG sînt asemenea pentru că unghiurile din I sînt egale ca opuse la vîrf, iar unghiurile din B și D sînt egale pentru că sînt înscrise în arcele egale AF și AE; rezultă că laturile omoloage sînt proporționale

$$\frac{BI}{DI} = \frac{IH}{IG} = \frac{HB}{GD}. \tag{2}$$

3. În triunghiul EIF, dreapta HG este paralelă cu baza EF pentru că ea determină pe laturile EI și FI segmente proporționale; într-adevăr, din rapoartele egale (1) și (2) deducem

$$\frac{IE}{IF} = \frac{IH}{IG}. \tag{3}$$

4. În triunghiul EIC, paralela HH' la baza EC împarte celelalte două laturi în segmente proporționale, adică

$$\frac{IE}{IH} = \frac{IC}{IH'}. \tag{4}$$

La fel, în triunghiul FIC, paralela GG' la baza FC împarte celelalte două laturi în segmente proporționale, adică

$$\frac{IF}{IG} = \frac{IC}{IG'}. \tag{5}$$

Egalitatea (3) arată că partea întîi în (4) este egală cu partea întîi în (5), deci

$$\frac{IC}{IH'} = \frac{IC}{IG'},$$

adică punctele G' și H' situate pe dreapta IC coincid, ceea ce revine la a spune că dreptele GG' și HH' se întîlnesc într-un punct K situat pe dreapta IC, adică punctele I, C, K sînt coliniare.

5. Punctele B, D, G, H sînt situate pe un cerc, pentru că unghiurile BGD și BHD sînt egale cu unghiul la centru BOD, deci cercul trece și prin centrul O. Într-adevăr, unghiul BGD are ca măsură

$$\frac{\text{arc}BD + \text{arc}AF}{2} = \text{arc}\,BD,$$

iar unghiul BHD are ca măsură

$$\frac{\text{arc}BD + \text{arc}AE}{2} = \text{arc}\,BD,$$

pentru că cele trei arce AF, AE, BD sînt egale.

6. La arcele egale BD, AE, AF corespund coarde egale

$$BD = AE = AF.$$

I.35. 1. *Se dă un patrulater și un punct situat în planul patrulaterului; să se găsească locul geometric al punctului, știind că suma pătratelor distanțelor lui la două vîrfuri opuse ale*

patrulaterului este egală cu suma pătratelor distanțelor lui la celelalte două vîrfuri opuse.

2. Care este locul geometric, dacă punctul este situat în spațiu?

3. Cazuri particulare: patrulaterul este a) trapez isoscel; b) dreptunghi; c) paralelogram.

Soluție. 1. Fie patrulaterul $ABCD$, E mijlocul diagonalei AC și F mijlocul diagonalei BD. Fie P un punct oarecare situat

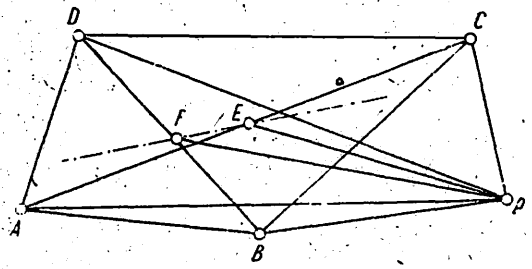


Fig. 15

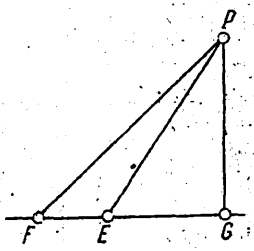


Fig. 16

în planul patrulaterului sau în spațiu (fig. 15). Teorema medianei, aplicată triunghiurilor APC și BPD, dă:

$$4PE^2 + AC^2 = 2(PA^2 + PC^2),$$

$$4PF^2 + BD^2 = 2(PB^2 + PD^2).$$

Prin ipoteză $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$; rezultă, ținînd seama că $AC = 2AE$, $BD = 2BF$,

$$PF^2 - PE^2 = AE^2 - BF^2 = \text{constant}. \qquad (1)$$

Fie G piciorul perpendicularei coborîte din P pe dreapta FE (fig. 16); aplicăm teorema lui Pitagora la triunghiurile dreptunghice formate PGF și PGE

$$PF^2 = PG^2 + GF^2,\ PE^2 = PG^2 + GE^2,$$

de unde deducem prin scădere membru cu membru,

$$PF^2 - PE^2 = GF^2 - GE^2, \qquad (2)$$

iar din egalitățile (1) și (2) deducem

$$FG^2 - EG^2 = AE^2 - BF^2,$$

care se mai scrie

$$(FG - EG)(FG + EG) = AE^2 - BF^2$$

sau

$$FE(FE + 2EG) = AE^2 - BF^2,$$

sau, în sfîrșit,

$$EG = \frac{AE^2 - BF^2 - FE^2}{2FE}. \qquad (3)$$

Această egalitate determină poziția punctului G pe dreapta FE; locul geometric al punctului P este perpendiculara ridicată în G pe dreapta FE.

2. Dacă punctul P este situat în spațiu, locul geometric al punctului P este planul dus prin G perpendicular pe dreapta FE.

3. a) Dacă patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel, diagonalele AC și BD sînt egale, deci $AE = BF$, deducem $PF = PE$; locul geometric al punctului P este axa de simetrie a trapezului, iar în spațiu, planul de simetrie al trapezului, adică planul perpendicular pe planul trapezului și care trece prin axa lui de simetrie.

b) Dacă patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi, mijloacele E și F ale diagonalelor coincid și diagonalele AC și ED sînt egale; în acest caz

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2,$$

oricare ar fi punctul P din planul dreptunghiului sau din spațiu; problema este nedeterminată.

c) Dacă patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram, mijloacele E și F ale diagonalelor coincid, însă diagonalele AC și BD sînt diferite, deci egalitatea (1)

$$PF^2 - PE^2 = AE^2 - BF^2$$

este imposibilă, pentru că $PF = PE$, iar $AE \neq BF$, deci problema este imposibilă.

Ca exercițiu, propunem să se studieze problema în spațiu, presupunînd că A, B, C, D sînt vîrfurile unui tetraedru.

I.36. *Se dau două drepte D_1 și D_2 concurente în punctul O și se cere:*

1. *Să se construiască un cerc situat în planul acestor două drepte, avînd centrul în O și astfel încît, dacă A și B sînt punctele de intersecție ale dreptei D_1 cu acest cerc, iar C și D punctele de intersecție ale dreptei D_2 cu același cerc, distanța AC să fie egală cu o lungime dată l, unghiul AOC fiind ascuțit* (fig. 17).

2. *Care este mărimea unghiului AOC a) în cazul $AD = AC$ și b) în cazul $AD = (2 + \sqrt{3})\,AC$.*

3. *Să se calculeze mărimea razei cercului, în funcție de l, în ambele cazuri particulare precedente.*

Soluție. 1. În cercul căutat O, coarda AC, de lungime dată l, este perpendiculară pe bisectoarea Ox a unghiului D_1OD_2; pentru a o construi luăm un punct arbitrar A' pe D_1, din A' coborîm perpendiculara $A'C'$ pe Ox și pe ea luăm punctul C' astfel ca $A'C' = l$; paralela prin C' la D_1 taie pe D_2 în C, iar

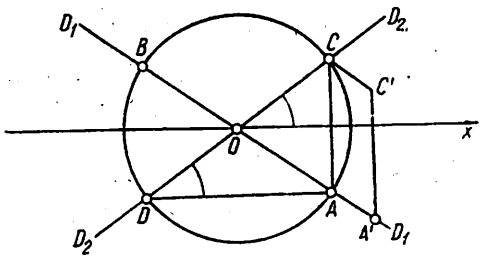


Fig. 17

perpendiculara din C pe Ox taie pe D_1 în A. Cercul cu centrul în O și raza $OA = OC$ este cercul căutat.

2. a) Dacă $AC = AD$, triunghiul dreptunghi CAD este isoscel și mediana AO este și înălțime, deci unghiul AOC este un unghi drept.

b) Dacă $AD = (2 + \sqrt{3})\, AC$, din triunghiul dreptunghi CAD scoatem

$$AC = AD \operatorname{tg} \sphericalangle ADC,\ \operatorname{tg} \sphericalangle ADC = \frac{1}{(2+\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3},$$

deci $\sphericalangle ADC = 15°$, iar $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle ADC = 30°$.

3. a). $AC = AD$; triunghiul dreptunghi CAD are catetele egale cu l, iar ipotenuza egală cu diametrul $2R$, deci

$$4R^2 = l^2 + l^2,\quad R = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

b) $AD = (2 + \sqrt{3})\, AC$; triunghiul AOC este isoscel, unghiul din O fiind de 30°, iar unghiurile din A și C de 75°; teorema sinusurilor dă

$$\frac{OA}{\sin C} = \frac{AC}{\sin O} \quad \text{sau} \quad \frac{R}{\sin 75°} = \frac{l}{\sin 30°},$$

$$R = \frac{l \sin 75°}{\sin 30°} = 2l \sin (30° + 45°) = 2l(\sin 30° \cos 45° +$$

$$+ \cos 30° \sin 45°) = \frac{l\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{2}.$$

I.37. *Un om are un loc în formă de trapez oarecare $ABCD$.*

1. *Cum nu posedă decît un lanţ cu care poate să măsoare lungimile, el măsoară laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ şi calculează aria totală S a locului.*

2. *Vrea apoi să împartă locul în două parcele P şi Q, ducînd un gard rectiliniu CM astfel ca $P = kQ$, unde raportul k este dat. Pentru aceasta, el calculează aria triunghiului BCM şi determină apoi lungimea laturii necunoscute $BM = x$, ţinînd seama de relaţia $P = kQ$.*

3. *Aplicaţie.* $a = 30$ m, $b = 20$ m, $c = 15$ m, $d = 25$ m; $k = 2$.

Soluţie. 1. Ducem prin D paralela DE la latura BC şi obţinem triunghiul ADE (fig. 18), în care se cunosc toate laturile

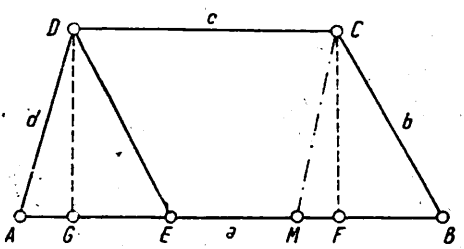


Fig. 18

$$AE = a - c, \quad ED = b, \quad DA = d,$$

şi paralelogramul $EBCD$.

Aria Σ a unui triunghi în funcţie de laturile α, β, γ este dată de formula

$$\Sigma^2 = p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)$$

în care

$$2p = \alpha + \beta + \gamma.$$

Pentru aria S_1 a triunghiului AED avem

$$\alpha = a - c, \ \beta = b, \ \gamma = d,$$

deci

$$16S_1^2 = (a+b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c+d).$$

Notînd acum cu I înălţimea $CF = DG$ a triunghiului ADE, care este şi înălţimea trapezului, din formula care dă aria triunghiului

$$S_1 = (a - c)\frac{I}{2},$$

se scoate

$$I = \frac{2S_1}{a - c};$$

aria paralelogramului este

$$S_2 = cI = \frac{2S_1 c}{a - c},$$

iar aria trapezului

$$S = S_1 + S_2 = S_1 \frac{a+c}{a-c}.$$

2. Din relațiile

$$P = kQ, \quad P + Q = S,$$

scoatem

$$P = \frac{kS}{1+k}, \quad Q = \frac{S}{1+k}.$$

Pe de altă parte

$$P = \frac{xI}{2},$$

deci

$$x = \frac{2kS}{(1+k)I}.$$

3. Dacă se fac înlocuirile, se găsește

$$S_1 = 150 \text{ m}^2, \quad S_2 = 300 \text{ m}^2, \quad S = 450 \text{ m}^2.$$

$$I = \frac{S_2}{c} = \frac{300}{15} = 20 \text{ m}, \quad x = 30 \text{ m}.$$

Punctul M trebuie să se găsească chiar în A, ceea ce se verifică direct, triunghiul ABC avînd aria de 300 m², iar triunghiul ADC de 150 m².

I.38. *Se dă un triunghi isoscel ABC, unde $CA = CB$; pe cercul O, tangent în A la AC și tangent în B la BC, se consideră un punct M interior triunghiului.*

Fie D, E, F picioarele perpendicularelor duse din M pe AB, AC, BC și H, I, G punctele în care dreptele AO, BO, MO taie din nou cercul. Se notează (fig. 19)

$$MA = a, \quad MB = b, \quad MO = r; \quad MD = d, \quad ME = e, \quad MF = f.$$

1. *Să se demonstreze că patrulaterele $ADME$, $BDMF$, $AGBM$ sînt asemenea.*

2. *Triunghiurile ABG și HIM sînt egale.*

3. *Să se calculeze d, e, f în funcție de a, b, r.*

Soluţie. 1. Patrulaterele $MAGB$, $MDBF$ şi $MEAD$ sînt asemenea pentru că au unghiurile respectiv egale; într-adevăr, în patrulaterul $MAGB$ înscris în cercul O diagonala MG este un diametru al cercului, deci unghiurile din A şi B sînt drepte; în patrulaterul $MDBF$, unghiurile din D şi F sînt drepte prin construcţie, iar în patrulaterul $MEAD$, unghiurile din E şi D sînt drepte tot prin construcţie.

În sfîrşit în cele trei patrulatere, unghiurile din G, B, A sînt egale pentru că toate au ca măsură jumătatea arcului AB, deci sînt egale cu jumătatea unghiului la centru AOB.

Rezultă că laturile şi diagonalele omoloage sînt proporţionale; din asemănarea primelor două patrulatere deducem egalităţile (1), iar din asemănarea ultimelor două patrulatere deducem egalităţile (2) şi anume:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AG}{DB} = \frac{GB}{BF} = \frac{BM}{FM} = \frac{MG}{MB} = \frac{AB}{DF} \tag{1}$$

$$\frac{MD}{ME} = \frac{DB}{EA} = \frac{BF}{AD} = \frac{FM}{DM} = \frac{MB}{MA} = \frac{DF}{ED}. \tag{2}$$

2. Triunghiurile ABG şi HIM sînt egale pentru că unul este simetricul celuilalt în raport cu centrul O; într-adevăr, perechile

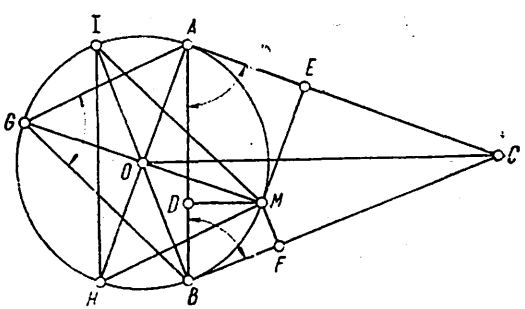


Fig. 19

de vîrfuri A şi H, B şi I, G şi M sînt puncte diametral opuse în cercul O.

3. În egalităţile (1) scriem că primul raport este egal cu al patrulea raport şi cu al cincilea,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{f} = \frac{2r}{b}, \tag{3}$$

iar în egalitățile (2) scriem că primul raport este egal cu al patrulea

$$\frac{d}{e} = \frac{f}{d}. \tag{4}$$

În (3) și (4) avem trei ecuații cu trei necunoscute, de unde deducem

$$d = \frac{ab}{2r}, \quad e = \frac{a^2}{2r}, \quad f = \frac{b^2}{2r}.$$

II.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

II.1. *Se dă triunghiul echilateral ABC, de latură a și o dreaptă MN situată în același plan cu triunghiul, paralelă cu latura BC și la distanța h de aceasta.*

1. *Să se calculeze aria S ce se obține prin rotirea de 360° în jurul axei MN a conturului $ABCA$ al triunghiului.*

2. *Să se calculeze volumul V ce se obține prin rotirea de 360° în jurul axei MN a triunghiului ABC.*

Soluție. 1. Latura BC generează un cilindru, a cărui arie laterală este egală cu $a \times 2\pi h$; laturile AB și AC generează două trunchiuri de con egale; aria laterală a unuia dintre ele este egală cu $\pi a(R + r)$, unde R este distanța vîrfului A la axă, iar $r = h$ este distanța la axă a vîrfurilor B și C. Însă $R = h +$ înălțimea triunghiului echilateral, adică $R = h + \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deci

$$S = a \times 2\pi h + 2\pi a\left(2h + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \pi a\,(6h + a\sqrt{3}).$$

Centrul de greutate G al conturului triunghiului ABC se găsește la o distanță de axă egală cu h plus o treime din înălțimea triunghiului, adică $h + \frac{a\sqrt{3}}{6}$; după teorema lui Pappus, regăsită de *Guldin*, aria S este egală cu lungimea conturului, adică $3a$, înmulțită cu lungimea cercului a cărui rază este egală cu distanța la axă a centrului de greutate G, adică

$$S = 3a \times 2\pi\left(h + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \pi a\,(6h + a\sqrt{3})$$

și am regăsit același rezultat ca prin prima metodă.

2. Latura BC generează un cilindru al cărui volum este egal cu $a \times \pi h^2$; laturile AB și AC generează două trunchiuri de con egale; volumul unuia este egal cu $\pi l\,\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}$, unde

înălțimea $l = \frac{a}{2}$, iar R și r au fost determinate la punctul 1 și anume $r = h$, $R = h + \frac{a\sqrt{3}}{2}$; urmează că volumul V egal cu cele două trunchiuri de con, mai puțin cilindrul, este

$$V = \frac{2}{3}\pi \times \frac{a}{2}\left\{\left(h + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(h + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)h + h^2\right\} - a \times \pi h^2,$$

$$V = \frac{\pi a^2}{4}(a + 2h\sqrt{3}).$$

Centrul de greutate al suprafeței triunghiului ABC este același punct G de la punctul 1, deci după teorema lui *Pappus*, regăsită de *Guldin*[1]) volumul V este egal cu suprafața triunghiului, adică $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, înmulțită cu lungimea cercului a cărui rază este egală cu distanța la axă a centrului de greutate G, adică $h + a\frac{\sqrt{3}}{6}$, deci

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times 2\pi\left(h + a\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pi a^2}{4}(a + 2h\sqrt{3})$$

și am regăsit același rezultat ca prin prima metodă.

II.2. *Fie R, S, V raza, aria și volumul unei sfere; se împarte sfera în n^3 sfere egale, fie r, s, v, raza, aria, volumul unei sfere mici. Să se determine raportul dintre aria totală a sferelor mici și aria sferei inițiale.*

Soluție. Avem :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3;\ S = 4\pi R^2;\ v = \frac{4}{3}\pi r^3,\ s = 4\pi r^2.$$

Din relația $V = n^3 v$ scoatem

$$R^3 = n^3 r^3,\ R = nr,\ r = \frac{R}{n}.$$

Aria celor n^3 sfere mici este

$$n^3 \times 4\pi r^2 = 4\pi \times n^3\left(\frac{R}{n}\right)^2 = n \times 4\pi R^2 = nS.$$

---

[1]) Cunoscută sub numele de teorema a doua a lui Guldin.

Obținem următorul rezultat: dacă o sferă de rază R se descompune în n^3 sfere egale, raza fiecărei sfere mici este egală cu $\frac{R}{n}$, iar aria totală a sferelor mici este de n ori mai mare decît aria sferei inițiale.

Observație. Rezultatul este același dacă în locul sferei considerăm un cub pe care-l descompunem în n^3 cuburi egale, sau un paralelipiped sau, mai general, un corp de o formă oarecare pe care-l descompunem în n^3 corpuri egale și asemenea cu corpul inițial; dacă S este aria corpului dat, aria totală a celor n^3 corpuri este nS, care din punct de vedere matematic poate fi arbitrar de mare, luînd pe n suficient de mare.

Există în natură numeroase exemple de corpuri care se divid în mai multe și mai mici, astfel ca volumul rămînînd același, suprafața să se mărească. Se știe din Biologie că, dacă celula a ajuns la maturitate, presiunea osmotică se dezechilibrează și pentru restabilirea echilibrului, este necesară o suprafață mai mare pe care celula o realizează prin diviziunea aceleași mase în mai multe celule.

La unul dintre Cursurile Facultății de Medicină se dă chiar următorul exemplu, de natură să impresioneze pe studenți; o sferă, care are mărimea unei *mingi de tenis*, poate fi descompusă în mai multe sfere egale, așa fel ca suprafața totală a sferelor mici să fie egală cu suprafața *terenului de tenis*.

Din *fizică* se știe că curenții de înaltă frecvență se propagă la suprafața conductorului, astfel încît în locul unui cablu cilindric gros, se fabrică un conductor format din numeroase fire subțiri, numite *lițe*, care sub același volum prezintă o suprafață mai mare. În mod precis, dacă cilindrul de lungime l și cu raza bazei R se descompune în n^2 fire, de aceeași lungime l, însă cu raza bazei $\frac{R}{n}$, suprafața celor n^2 *lițe* este de n ori mai mare decît suprafața cablului inițial.

Discuție. Am văzut că dacă o sferă de arie S se descompune în n^3 sfere egale, aria totală a acestor n^3 sfere mici este egală cu nS. Care este valoarea maximă a lui nS? Din punct de vedere matematic, nS poate lua o valoare infinit de mare luînd pe n suficient de mare, însă din punct de vedere fizic, nS are o valoare maximă *finită*, ceea ce este ușor de prevăzut, pentru că materia avînd o structură discontinuă, adică fiind formată din molecule, atomi, electroni, protoni, neutroni, nu putem continua cu diviziunea unui corp dat în părți oricît de mici și deci n are o valoare finită. Să facem calculul în cazul hidrogenului, care este elementul cel mai simplu din punctul de vedere al structurii atomice; rezultate analoge se pot obține și pentru celelalte elemente.

Un balon sferic cu raza de 17,47 cm are volumul egal cu 22,34 $l = 22{,}34 \times \times 10^3$ cm^3; acest volum poartă în Chimie numele de *volum molecular gazos*. La temperatura de 0° și la presiunea de 760 mm mercur, în vasul sferic încap 2,016 g de hidrogen, care se compune din $6{,}062 \times 10^{23}$ molecule; numărul $N = 6{,}062 \times \times 10^{23}$ poartă numele de *numărul lui Avogadro*. Cum fiecare moleculă de hidrogen se compune din 2 atomi, avem în vasul nostru $2N = 12{,}124 \times 10^{23}$ atomi de hidrogen. Presupunem că am reușit să izolăm atomii și să închidem pe fiecare în cîte un balonaș sferic a cărui rază să fie egală cu raza orbitei pe care se mișcă electronul în jurul nucleului (atomul de hidrogen se compune din nucleu și un singur electron). Să calculăm aria balonului inițial și aria balonașelor.

Aria balonului este

$$4\pi R^2 = 4\pi\ (17{,}47)^2 = 38{,}36 \times 10^2 \text{ cm}^2,$$

adică aproximativ o treime dintr-un metru pătrat.

Cea mai mică orbită pe care se mişcă electronul, în atomul de hidrogen, are raza

$$a_1 = \frac{0{,}53}{10^8} \text{ cm},$$

iar celelalte orbite, pe care se poate mişca electronul, au razele

$$a_2 = 4a_1,\ a_3 = 9\ a_1,\ \ldots,\ a_n = n^2 a_1.$$

Aria S_1 a celor $2N = 12,124 \times 10^{23}$ balonaşe de rază a_1 este

$$S_1 = 42{,}795 \times 10^7 \text{ cm}^2 = 0{,}042295 \text{ km}^2,$$

iar volumul lor este

$$V_1 = \frac{7{,}66}{10} \text{ cm}^3 = 0{,}000766 \times 10^3 \text{ cm}^3.$$

Aria S_2 şi volumul V_2 ale celor $2N$ balonaşe de rază a_2 sînt

$$S_2 = 4^2\ S_1 = 0{,}68427 \text{ km}^2;\ V_2 = 4^3\ V_1 = 0{,}048384 \times 10^3 \text{ cm}^3.$$

Aria S_3 şi volumul V_3 ale celor $2N$ balonaşe de rază a_3 sînt

$$S_3 = 9^2\ S_1 = 3{,}466395 \text{ km}^2;\ V_3 = 9^3\ V_1 = 0{,}551124 \times 10^3 \text{ cm}^3.$$

Aria S_4 şi volumul V_4 ale celor $2N$ balonaşe de rază a_4 sînt

$$S_4 = 16^2\ S_1 = 10{,}955420 \text{ km}^2;\ V_4 = 16^3\ V_1 = 3{,}096576 \times 10^3 \text{ cm}^3.$$

Aria S_5 şi volumul V_5 ale celor $2N$ balonaşe de rază a_5 sînt

$$S_5 = 25^2\ S_1 = 26{,}746875 \text{ km}^2;\ V_5 = 25^3\ V_1 = 11{,}8125 \times 10^3 \text{cm}^3$$

Aria S_6 şi volumul V_6 ale celor $2N$ balonaşe de rază a_6 sînt

$$S_6 = 36^2\ S_1 = 55{,}462320 \text{ km}^2;\ V_6 = 36^3\ V_1 = 35{,}271936 \times 10^3 \text{ cm}^3.$$

Dacă presupunem că volumul moleculei de hidrogen este egal cu suma volumelor celor doi atomi şi dacă facem ipoteza că volumul total al balonaşelor, în care am putea izola cîte o moleculă dintr-un corp oarecare, este mai mic decît volumul corpului, ceea ce revine a presupune că nu există întrepătrundere între molecule, deducem că electronul, în atomul de hidrogen, se poate mişca pe orbitele de raze a_1, a_2, a_3, a_4 şi a_5, pentru că

$$V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < V_5 = 11{,}8125 \times 10^3 \text{ cm}^3 < 22{,}34 \times 10^3 \text{ cm}^3 = \text{volumul balonului iniţial},$$

dar nu se poate mişca pe orbitele de raze a_6, a_7 etc., pentru că dacă electronul s-ar mişca, de exemplu, pe orbita de rază a_6, am avea

$$V_6 = 35{,}271936 \times 10^3 \text{ cm}^3 > 22{,}34 \times 10^3 \text{ cm}^3 = \text{volumul balonului iniţial.}$$

Urmează că S_5 reprezintă *valoarea maximă* a ariei totale a balonaşelor în care putem descompune volumul dat de hidrogen, adică *hidrogenul cuprins într-un balon sferic, a cărui arie este egală cu o treime dintr-un metru pătrat, poate fi descompus într-un număr atît de mare de balonaşe, încît suprafaţa lor să fie egală cu o treime din suprafaţa oraşului Bucureşti.*

II.3. *Fie ABC un triunghi dreptunghi în care D este piciorul înălțimii coborîte din A pe ipotenuza BC; cunoscînd $AC = b$, $AB = c$, se cere să se calculeze:*

1. *Volumul și aria solidului generat prin rotația triunghiului ABC în jurul lui AC;*

2. *Volumul și aria solidului generat prin rotația aceluiași triunghi ABC în jurul lui AB.*

Soluție. Vom rezolva problema, în general, pentru un triunghi oarecare ABC, ale cărui laturi le vom nota ca de obicei:

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c.$$

Să ducem înălțimile AD, BE, CF și să notăm cu h_a, h_b, h_c lungimile lor.

Volumul V_a al solidului, născut prin rotirea de 360° în jurul lui BC, a triunghiului ABC, este suma volumelor conurilor generate de triunghiurile dreptunghice ABD, ACD, dacă unghiurile B, C ale triunghiului ABC sînt ascuțite, sau diferența volumelor acestor conuri, dacă unul dintre unghiurile B, C este obtuz. În primul caz, avem

$$V_a = \frac{\pi}{3} AD^2 \cdot DB + \frac{\pi}{3} AD^2 \cdot DC = \frac{\pi}{3} ah_a^2;$$

în al doilea caz, avem:

$$V_a = \frac{\pi}{3} AD^2 \cdot DB - \frac{\pi}{3} AD^2 \cdot DC = \frac{\pi}{3} ah_a^2.$$

(am presupus $C > 90°$).

Deci în toate cazurile avem: $V_a = \frac{\pi}{3} ah_a^2$; în același mod deducem expresiile volumelor analoge:

$$V_b = \frac{\pi}{3} bh_b^2, \qquad V_c = \frac{\pi}{3} ch_c^2.$$

Aceste relații se mai pot scrie și astfel:

$$V_a = \frac{\pi}{3} 2Sh_a, \quad V_b = \frac{\pi}{3} 2Sh_b, \quad V_c = \frac{\pi}{3} 2Sh_c,$$

S fiind aria triunghiului ABC.

Dacă se dau lungimile a, b, c ale laturilor triunghiului ABC calculul celor trei volume se face astfel: se calculează întîi aria cu formula:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},\quad (2p = a+b+c);$$

apoi volumele rezultă din egalitățile:

$$aV_a = \frac{\pi}{3}\cdot 4S^2,\quad bV_b = \frac{\pi}{3}\cdot 4S^2,\quad cV_c = \frac{\pi}{3}\cdot 4S^2. \qquad (1)$$

Dacă triunghiul ABC este dreptunghi în A, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

deci este de ajuns să se dea b, c căci $2S = bc$.

Între cele trei volume există o relație, după cum vom vedea îndată, astfel că este suficient să calculăm numai două dintre ele.

Oricare ar fi triunghiul ABC, avem relațiile:

$$aV_a = bV_b = cV_c = 4\pi S^2, \qquad (2)$$

deci volumele V_a, V_b, V_c *sînt invers proporționale cu lungimile* laturilor a, b, c.

Dacă triunghiul ABC prezintă o anumită particularitate, deci dacă între laturi avem o relație de forma:

$$F(a,\ b,\ c) = 0,$$

(sau două, sau trei astfel de relații), între V_a, V_b, V_c avem relația:

$$F\left(\frac{1}{V_a};\ \frac{1}{V_b};\ \frac{1}{V_c}\right) = 0,$$

căci F este presupusă *funcție omogenă* de a, b, c.

De exemplu, dacă laturile triunghiului ABC sînt în *progresie aritmetică* $2a = b + c$, între volume avem:

$$\frac{2}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c},$$

adică cele trei volume sînt în *progresie armonică*.

Dacă laturile triunghiului sînt în *progresie geometrică*, volumele sînt tot în *progresie geometrică*; în sfîrșit, dacă triunghiul ABC este dreptunghi în A, avem:

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}.$$

Să calculăm acum ariile S_a, S_b, S_c ale celor trei solide de mai sus. Aria S_a este suma ariilor laterale ale conurilor generate de triunghiurile dreptunghice ABD, ACD (oricum ar fi unghiurile A, B, C). Deci:

$$S_a = \pi \cdot AD \cdot AB + \pi \cdot AD \cdot AC = \pi \cdot h_a (b + c).$$

În mod analog, deducem relațiile:

$$S_b = \pi \cdot h_b (c + a), \quad S_c = \pi \cdot h_c (a + b).$$

Aceste trei relații se mai pot scrie și astfel:

$$a \cdot S_a = 2\pi S (b+c), \quad b \cdot S_b = 2\pi S (c+a), \; c \cdot S_c = 2\pi S (a+b). \quad (3)$$

Dacă se cunosc deci lungimile laturilor a, b, c, putem calcula cele trei arii S_a, S_b, S_c.

Observăm că relațiile (3) fiind omogene în raport cu a, b, c, între S_a, S_b, S_c, S va exista o relație dedusă prin eliminarea lui a, b, c:

$$\begin{vmatrix} -\frac{S_a}{2\pi S} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{S_b}{2\pi S} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{S_c}{2\pi S} \end{vmatrix} = 0,$$

$$4\pi^2 S^2 (S_c + S_b + S_a) + 16\pi^3 S^3 = S_a S_b S_c. \quad (4)$$

Dacă cunoaștem suma $S_a + S_b + S_c$ și produsul $S_a S_b S_c$, putem calcula pe S; în adevăr, notînd $2\pi S = x$, relația (4) devine:

$$2x^3 + (S_a + S_b + S_c)x^2 - S_a S_b S_c = 0;$$

această ecuație are o singură rădăcină pozitivă (teorema lui *Descartes*) deci avem pentru S o singură valoare. Este curios faptul că pentru calculul lui S nu avem nevoie chiar de S_a, S_b, S_c, ci numai de suma și produsul lor.

Observație. Dacă ne propunem problema inversă celei date, adică să calculăm pe a, b, c cînd cunoaștem pe S_a, S_b, S_c, vom proceda astfel: vom începe prin a calcula pe S din ecuația (4), luînd rădăcina pozitivă a acestei ecuații; vom înlocui apoi valoarea aflată pentru S în ecuațiile (3). Aceste ecuații formează un sistem liniar și omogen, care admite și soluții diferite de zero, căci condiția (4) este verificată, deci *vom putea determina pe a, b, c într-o infinitate de feluri* considerînd numai două dintre ecuațiile (3); aceste valori diferă printr-un factor de proporționalitate. Determinarea lui a, b, c se poate face deci într-o infinitate de

moduri, cînd se dau S_a, S_b, S_c; pentru determinarea ariei S nu este nevoie chiar de S_a, S_b, S_c, ci numai de suma și produsul lor.

Dacă ne-am pune aceeași problemă pentru volume, vom proceda astfel: din sistemul (2) scoatem:

$$a = \frac{k}{V_a}, \quad b = \frac{k}{V_b}, \quad c = \frac{k}{V_c}, \tag{5}$$

k fiind un factor de proporționalitate. Dacă acum considerăm ecuația $3k = 4\pi S^2$, sau dezvoltată:

$$12k = \pi(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4),$$

putem deduce pe k, înlocuind aici pe a, b, c prin valorile (5). Se deduce o ecuație de gradul 4. căreia suprimîndu-i rădăcina $k = 0$, ne rămîne ecuația: $\pi Ak^3 = 12$, unde am însemnat:

$$A = \frac{2}{V_b^2V_c^2} + \cdots - \frac{1}{V_a^4} - \cdots$$

Introducînd în (5) rădăcina reală pozitivă a ecuației în k, avem valorile lui a, b, c. Problema admite în general o soluție unică. (Mai rămîn de cercetat condițiile ca lungimile a, b, c să poată determina un triunghi).

Dacă între laturile triunghiului ABC avem o relație de forma: $F(a, b, c) = 0$, între S_a, S_b, S_c vom avea de asemenea o relație, obținută eliminînd pe a, b, c din relația precedentă și relațiile (3).

De exemplu, dacă laturile triunghiului ABC sînt în progresie aritmetică $2a = b + c$, relațiile (3) devin:

$$S_a = 4\pi S, \quad bS_b = \pi S(b + 3c), \quad cS_c = \pi S(3b + c).$$

De aici deducem relațiile:

$$b(4S_b - S_a) = 3cS_a, \quad c(4S_c - S_a) = 3bS_a.$$

Eliminînd pe b, c avem relația căutată:

$$(4S_b - S_a)(4S_c - S_a) = 9S_a^2.$$

II.4. *Într-un plan se dau două puncte A, B și două drepte oarecare D și Δ; se cere:*

1. *Să se determine în acest plan un punct M, care să fie în același timp egal depărtat de punctele A, B și de dreptele D și Δ.*

2. *Însemnînd $AB = 2l$, $MA = a$, se cere să se calculeze aria și volumul corpului generat de triunghiul AMB, prin rotirea lui în jurul dreptei AB.*

3. *Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu echidistante în același timp de punctele A, B și de dreptele D și Δ* (fig. 20).

Soluție. 1. Dreptele D și Δ se taie în O, fie OB_1 și OB_2 bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară a unghiului $DO\Delta$. Fie C mijlocul segmentului AB și CM perpendiculara în C pe AB; această perpendiculară taie bisectoarele OB_1

și OB_2 în M_1 și M_2. Punctele M_1 și M_2 sînt cele două soluții ale problemei; într-adevăr M este egal depărtat de A și B, adică $MA = MB$, ca oblice egal depărtate de piciorul C al perpendicularei MC; însă punctul M găsindu-se pe bisectoarea OB, este egal depărtat de dreptele D și Δ (am însemnat, pentru prescurtare, prin M și B respectiv, unul dintre punctele M_1 și M_2, B_1 și B_2).

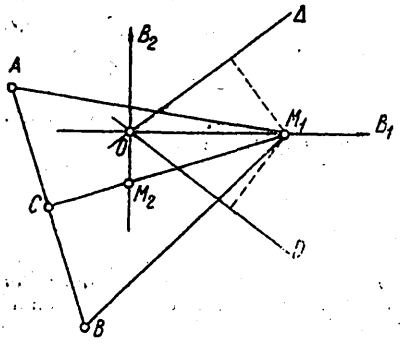


Fig. 20

2. Triunghiul AMB se descompune în două triunghiuri dreptunghice egale ACM și BCM, care descriu, prin rotirea lor în jurul lui AB, două conuri egale, cu înălțimile $CA = CB = l$ și ale căror baze coincid cu cercul cu centrul în C și raza $CM = \sqrt{a^2 - l^2}$; generatoarea acestor conuri este

$$AM = BM = a.$$

Aria generată de conturul AMB este egală cu aria laterală a celor două conuri, adică

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot CM \cdot AM + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot CM \cdot BM = 2\pi a \sqrt{a^2 - l^2}.$$

Volumul generat de triunghiul AMB este egal cu suma volumelor celor două conuri, adică

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CM^2 \cdot CA + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CM^2 \cdot CB = \frac{2}{3} \pi (a^2 - l^2) l.$$

Mai putem determina S și V cu ajutorul celor două teoreme ale lui *Guldin*

$$S = \text{arc} \times 2\pi d, \quad V = \text{aria} \times 2\pi d,$$

unde d este distanța la axa de rotație a centrului de greutate: al conturului poligonal $AMBA$ în cazul ariei S; al ariei triunghiului AMB, în cazul volumului V.

Conturul poligonal $AMBA$ se compune din trei laturi AM, MB și BA, deci lungimea conturului este

$$\text{arc} = AM + MB + BA = a + a + 2l = 2\ (a + l).$$

Distanțele d_1, d_2, d_3 ale mijloacelor celor trei laturi AM, MB, BA, la axa de rotație AB, sînt:

$$d_1 = d_2 = \frac{CM}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}; \quad d_3 = 0.$$

Distanța d a centrului de greutate al conturului poligonal $AMBA$ la axa de rotație AB este dată de

$$d = \frac{AM \times d_1 + MB \times d_2 + BA \times d_3}{AM + MB + BA},$$

$$d = \frac{a\sqrt{a^2 - l^2}}{a + a + 2l}.$$

Făcînd înlocuirile:

$$S = \text{arc} \times 2\pi d = 2(a + l) \times 2\pi a \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{a + a + 2l},$$

$$S = 2\pi a\sqrt{a^2 - l^2}.$$

Centrul de greutate al ariei triunghiului AMB se găsește pe mediana (care este și înălțime) CM, la $\frac{1}{3}$ de baza AB, deci distanța d a centrului de greutate, la axa de rotație AB, este $d = \frac{CM}{3} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{3}$. Aria triunghiului AMB este

$$\frac{1}{2} AB \times CM = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \sqrt{a^2 - l^2} = l\sqrt{a^2 - l^2}.$$

Făcînd înlocuirile,

$$V = \text{aria} \times 2\pi d = l\sqrt{a^2 - l^2} \times 2\pi \cdot \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - l^2} = \frac{2}{3}\pi l(a^2 - l^2).$$

3. Fie P_1 și P_2 planele perpendiculare pe planul (D, Δ) și ale căror urme pe acest plan sînt bisectoarele OB_1 și OB_2; este evident că orice punct din planul P_1 (sau P_2) este egal depărtat de dreptele D și Δ. Fie π planul perpendicular în C pe segmentul AB; urmează că orice punct al planului π este egal depărtat de punctele A și B. Planul π taie planele P_1 și P_2 după două drepte D_1 și D_2, perpendiculare în M_1 și M_2 pe planul (D, Δ) și orice punct al dreptei D_1 (sau D_2) este egal depărtat de punctele A, B și de dreptele D, Δ.

II.5. *Se dau într-un plan două cercuri: O de rază R și O' de rază $R' \neq R$.*

1) *să se ducă o secantă care să intercepteze pe cercul O o coardă de lungime $\frac{R}{2}$ și în cercul O' o coardă de lungime $\frac{R'}{2}$* (fig. 21)

2. *Să se generalizeze în spațiu.*

Soluție 1. Problema poate fi generalizată; dacă m și n sînt două numere mai mici decît unitatea, să determinăm o secantă care să intercepteze pe cercul O o coardă de lungime $2mR$,

iar pe cercul O' o coardă de lungime $2nR'$; enunțul dat corespunde cazului particular $m = n = \frac{1}{4}$.

Se construiește cercul O_1, concentric cu O și de rază $R_1 = R\sqrt{1-m^2}$, și cercul O_1', concentric cu O', și de rază $R_1' = R'\sqrt{1-n^2}$. Cercul O interceptează, pe o tangentă oare-

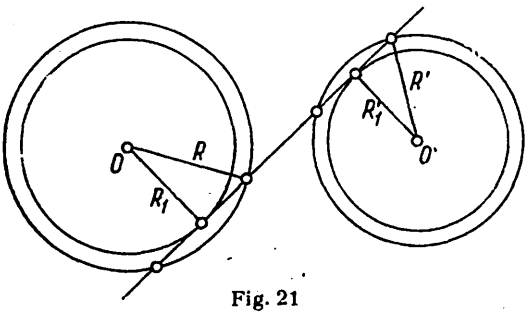


Fig. 21

care la cercul O_1, o coardă de lungime $2mR$; iar cercul O' interceptează, pe o tangentă oareçare la cercul O_1', o coardă de lungime $2nR'$. Urmează că cercurile date O și O', intercepteaza pe o tangentă comună la cercurile O_1 și O_1', două coarde egale respectiv cu $2mR$ și $2nR'$. Problema admite patru soluții, pentru că la două cercuri O_1 și O_1', presupuse exterioare, se pot duce patru tangente comune, două exterioare și două interioare.

2. Să rotim de 180°, în jurul liniei centrelor OO', figura plană formată de cercurile date O și O', de cercurile construite O_1 și O_1' și de tangentele comune exterioare și interioare la ultimele două cercuri; obținem sferele O și O', de raze R și R'; sferele O_1 și O_1', concentrice cu primele, de raze R_1 și R_1'; cele două conuri tangente sferelor O_1 și O_1'.

Un plan tangent oarecare la unul dintre aceste două conuri este tangent la sferele O_1 și O_1' și taie sferele O și O' după două cercuri ai căror diametri sînt egali respectiv cu $2mR$ și $2nR'$. Aceasta este generalizarea în spațiu a problemei date.

II.6. *Într-un plan P se dau două puncte fixe A, B; se mai ia un punct oarecare M în același plan.*

Fie M' un punct în spațiu astfel ca segmentul MM' să fie văzut din punctele A, B sub unghiuri drepte. Se cere locul punctului M' în următoarele cazuri:

1. *Punctul M este fix.*

2. *Punctul M descrie un cerc care trece prin punctele A, B.*

3. *Punctul M descrie o dreaptă perpendiculară pe AB* (fig. 22).

Soluție. Dacă se consideră toate dreptele perpendiculare în punctul A pe dreapta AM, se știe că toate aceste drepte sînt situate într-un același plan Q perpendicular pe dreapta AM și deci perpendicular pe planul P.

La fel, toate dreptele perpendiculare pe dreapta BM în punctul B, sînt situate într-un același plan R perpendicular pe BM și deci perpendicular pe planul P.

Intersecțiile planelor Q, R cu planul P sînt, evident, perpendicularele ridicate în punctele A, B respectiv pe dreptele AM, BM. Aceste două perpendiculare se taie în punctul N.

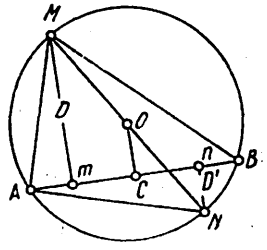


Fig. 22

Dreapta Δ, intersecția planelor Q, R trece, evident, prin N și este perpendiculară pe planul P, căci este intersecția a două plane perpendiculare pe planul P.

Punctul M' trebuie să se afle atît în planul Q cît și în planul R, deci se va afla pe dreapta Δ, intersecția acestor două plane.

1. Dacă punctul M este fix, evident că și punctul N este fix, deci dreapta este fixă. *Reiese de aici că, în acest caz, locul geometric al punctului M' este dreapta* Δ.

2. Presupunem că punctul M se mișcă acum în planul P după o lege anumită. În acest caz, locul geometric al punctului M' este, natural, suprafața cilindrică născută de dreapta Δ care rămîne paralelă cu ea însăși (este necontenit perpendiculară pe planul P și întîlnește o curbă directoare fixă, curba loc geometric al punctului N).

Dacă, de exemplu, punctul M descrie un cerc Γ trecînd prin A, B, punctul N descrie, evident, același cerc deoarece $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MBN = 90°$, adică punctele M, N sînt diametral opuse în cercul Γ.

Urmează că, în acest caz, locul geometric al punctului M' este cilindrul circular drept care are ca bază cercul Γ *și ale cărui generatoare sînt perpendiculare pe planul P.*

3. Să presupunem acum că punctul M descrie o dreaptă D perpendiculară pe AB. Fie m intersecția dreptei D cu AB, iar n proiecția punctului N pe AB. Figura $Mm\ Nn$ este un trapez. Dreapta OC care unește mijloacele diagonalelor MN, mn este paralelă cu Mm și cu Nn, deci este perpendiculară pe AB.

Cum O este centrul cercului circumscris patrulaterului $MANB$, urmează că punctul C, proiecția sa pe AB, este tocmai mijlocul lui AB. Deci punctul n este simetricul punctului fix m față de punctul fix C, deci este și el fix. Urmează că, în acest caz, locul geometric al punctului N este dreapta D', simetrica dreptei D față de punctul C.

Se poate arăta și în alt chip că punctul N descrie o perpendiculară pe AB. În adevăr, din triunghiurile dreptunghice MAN, MBN deducem $NB^2 = MN^2 - MB^2$, $NA^2 = MN^2 - MA^2$. Prin scădere deducem $NA^2 - NB^2 = MB^2 - MA^2$.

Dar deoarece M descrie dreapta D, perpendiculară pe AB, avem $MB^2 - MA^2 = mB^2 - mA^2 =$ constant, deci, $NA^2 - NB^2 =$ constant.

Se știe că locul geometric al unui punct N definit de o asemenea relație este o dreaptă perpendiculară pe AB.

Cînd punctul N descrie dreapta D', dreapta Δ generează, evident, un plan S perpendicular pe planul P, pe care-l intersectează după dreapta D'. *Deci locul geometric al punctului M' este în acest caz planul S.*

II.7. *Se dă un tetraedru regulat $ABCD$ de muchea*; *fie AO înălțimea din A. Un plan dus prin AO taie pe BC și BD respectiv în M și N. Se notează $BM = x$, $BN = y$. Să se arate că*

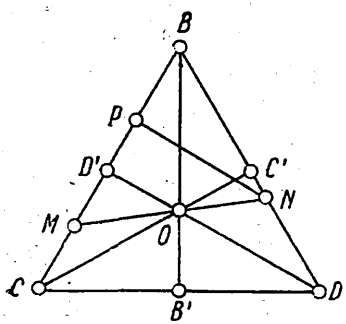


Fig. 23

1) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{a}.$$

2. *Să se determine x și y prin condiția ca suma ariilor triunghiurilor AMN, ABN, ABM să fie în raport constant k cu aria totală a tetraedrului.*

3. *Discuție* (fig. 23).

Soluție 1. Notăm cu B', C', D' picioarele înălțimilor triunghiului BCD, iar cu O centrul acestui triunghi; fie încă P proiecția punctului N pe latura BC; avem relația evidentă

$$2 \text{ aria } BMO + 2 \text{ aria } BNO = 2 \text{ aria } BMN \qquad (1)$$

sau

$$BM \times OD' + BN \times OC' = BM \times NP \qquad (2)$$

Observînd că triunghiul BNP este jumătate dintr-un triunghi echilateral, avem

$$BP = \frac{BN}{2} = \frac{y}{2}, \quad NP = \frac{BN\sqrt{3}}{2} = \frac{y\sqrt{3}}{2}.$$

Avem de asemenea $OD' = OC' = \frac{BB'}{3} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Cu acestea, relația (2) devine

$$\frac{a}{3}(x+y) = xy \quad \text{sau} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{a}.$$

2. Trebuie să avem relația

aria AMN + aria ABN + aria ABM = k aria tetraedrului (3).

Avem aria $AMN = \frac{1}{2} MN \times AO$. Teorema lui Pitagora generalizată, aplicată la triunghiul BMN, dă

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM \times BP$$

sau

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2x \cdot \frac{y}{2} \quad MN = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}.$$

Triunghiul dreptunghi AOB' dă $AO^2 = AB'^2 - OB'^2$,

sau

$$AO^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{2a^2}{3},$$

$$AO = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Deci aria $AMN = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2-xy} \times a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{x^2+y^2-xy}}{\sqrt{6}}$.

Avem mai departe

aria $ABN = \frac{1}{2} BN \times AC' = \frac{1}{2} y \times a\frac{\sqrt{3}}{2} = ay\frac{\sqrt{3}}{4}$,

aria $ABM = \frac{1}{2} BM \times AD' = \frac{1}{2} x \times a\frac{\sqrt{3}}{2} = ax\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Relația (3) devine

$$a\frac{\sqrt{x^2+y^2-xy}}{\sqrt{6}} + a\frac{\sqrt{3}(x+y)}{4} = k \text{ aria tetraedrului.}$$

Dar aria tetraedrului

$$= 4 \text{ aria } BCD = 4 \times \frac{1}{2} a \times a \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \sqrt{3}.$$

Deci, avem condiția :

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}(x+y)}{4} = ka\sqrt{3}.$$

Pentru determinarea lui x și y avem de rezolvat sistemul :

$$a(x+y) = 3xy, \quad \frac{\sqrt{(x^2+y^2) - xy}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}(x+y)}{4} = ka\sqrt{3}.$$

Ecuația a doua se mai scrie :

$$\frac{\sqrt{(x+y)^2 - 3xy}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}(x+y)}{4} = ka\sqrt{3},$$

sau, dacă ținem seama de prima ecuație,

$$\frac{\sqrt{(x+y)^2 - a(x+y)}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}(x+y)}{4} = ka\sqrt{3}.$$

Însemnînd $x + y = u$ și eliminînd numitorii, avem

$$4\sqrt{u^2 - au} = 12ka\sqrt{2} - 3u\sqrt{2}.$$

Ridicînd la pătrat și grupînd termenii,

$$u^2 - 8a(9k-1)u + 144k^2a^2 = 0.$$

Rădăcinile u_1, u_2, ale acestei ecuații sînt :

$$u_{1,2} = 4a[9k - 1 \pm \sqrt{(9k-1)^2 - 9k^2}]$$

sau

$$u_{1,2} = 4a[9k - 1 \pm \sqrt{(12k-1)(6k-1)}].$$

Condiția ca rădăcinile să fie reale este $(12k-1)(6k-1) \geqslant 0$, deci k trebuie să fie cuprins într-unul din intervalele

$$\left(-\infty, \frac{1}{12}\right); \left(\frac{1}{6}, +\infty\right).$$

Cum k trebuie să fie pozitiv, primul interval se reduce la $\left(0, \frac{1}{12}\right)$.

O dată cunoscut u, ne rămîne să rezolvăm sistemele.

$$x + y = u_1 \quad xy = \frac{au_1}{3}; \qquad x + y = u_2, \quad xy = \frac{au_2}{3}.$$

x şi y sînt deci rădăcinile ecuaţiilor

$$z^2 - uz + \frac{au}{3} = 0,$$

unde se va înlocui u cu u_1 şi u_2.

Pentru ca x şi y să fie reale, trebuie ca $u^2 - 4\frac{au}{3} \geqslant 0$, sau $u\left(u - 4\frac{a}{3}\right) \geqslant 0$, deci trebuie ca u_1 şi u_2 să fie cuprinse într-unul din intervalele $\left(-\infty, 0\right)$; $\left(4\frac{a}{3}, +\infty\right)$.

Primul interval se exclude căci u_1 şi u_2 trebuie să fie pozitive. De altfel, chiar din expresiile scrise mai sus rezultă că u_1, u_2 sînt pozitive. În adevăr, avem $(9k - 1)^2 - 9k^2 \leqslant (9k - 1)^2$,

$$\sqrt{(9k-1)^2 - 9k^2} \leqslant 9k - 1, \quad 9k - 1 \pm \sqrt{(9k-1)^2 - 9k^2} \geqslant 0.$$

3. Din cele de mai sus rezultă că valoarea minimă a sumei $x + y$ este $4\frac{a}{3}$, deci $x + y \geqslant 4\frac{a}{3}$, sau, sub formă geometrică,

$$BM + BN \geqslant 4\frac{a}{3}.$$

Se vede lesne că egalitatea corespunde cazului cînd MN este paralelă cu CD.

II.8. *Se consideră un solid format din două sfere egale de rază R, unite între ele printr-un cilindru de rază r şi de înălţime $2R$* (fig.24).

1. *Să se calculeze aria şi volumul solidului.*

2. *Să se studieze variaţia ariei solidului cînd r variază de la O la R.*

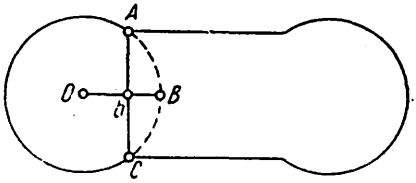


Fig. 24

Soluţie. 1. Aria solidului se compune din aria laterală a cilindrului, a cărei expresie este $2\pi r \times 2R = 4\pi Rr$, la care trebuie să adunăm ariile por-

țiunilor rămase din cele două sfere prin suprimarea a două calote egale cu ABC. Vom avea

Aria calotei $ABC = 2\pi R \times bB$. Pe figură se vede însă că avem

$$bB = R - bO = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Aria calotei $ABC = 2\pi R\,(R - \sqrt{R^2 - r^2})$.

Deci aria rămasă dintr-o sferă prin suprimarea calotei ABC are ca expresie

$$4\pi R^2 - 2\pi R\,(R - \sqrt{R^2 - r^2}) = 2\pi R\,(R + \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Aria totală a solidului va avea deci expresia

$$S = 4\pi Rr + 4\pi R\,(R + \sqrt{R^2 - r^2}),$$

sau

$$S = 4\pi R\,(R + r + \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Volumul solidului se compune din volumul cilindrului, a cărui expresie este $\pi r^2 \times 2R = 2\pi\, Rr^2$, şi din volumele celor două porţiuni de sferă rămase prin suprimarea celor două calote.

Volumul calotei ABC = aria calotei $ABC \times \frac{R}{3} - Ob\,\pi\frac{bA^2}{3}$

sau Volumul calotei ABC =

$$= \frac{2}{3}\pi R^2\,(R - \sqrt{R^2 - r^2}) - \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2};$$

volumul rămas dintr-o sferă, prin suprimarea calotei ABC, are expresia :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R^2\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2},$$

sau

$$\frac{2}{3}\pi R^2\,(R + \sqrt{R^2 - r^2}) + \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Volumul total al solidului are, deci, expresia :

$$V = 2\pi Rr^2 + \frac{4}{3}\pi R^2\,(R + \sqrt{R^2 - r^2}) + \frac{2}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2},$$

sau

$$V = 2\pi R\left\{r^2 + \frac{2}{3}R(R + \sqrt{R^2 - r^2})\right\} + \frac{2}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

2. Însemnăm cu y aria solidului,

$$y = 4\pi R(R + r + \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Luînd derivata lui y în raport cu r, avem

$$y' = 4\pi R - \frac{4\pi Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R\,\frac{\sqrt{R^2 - r^2} - r}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

sau înmulțind cu conjugata numărătorului

$$y' = 4\pi R\,\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}\,(\sqrt{R^2 - r^2} + r)}.$$

Derivata se anulează pentru $r = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Rădăcina negativă o excludem, căci r variază de la 0 la R. Să vedem dacă avem maxim sau minim pentru $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Observăm că semnul derivatei y' este dat de expresia $R - r\sqrt{2}$, căci toți ceilalți factori care intră în expresia derivatei sînt pozitivi.

Avem rezultatul următor:

$$r < \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad y' > 0; \quad r > \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad y' < 0,$$

deci pentru $r = \frac{R}{\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2}$, avem un maxim a cărui valoare se găsește ușor că este $y_{\text{maximum}} = 4\pi R^2(\sqrt{2} + 1)$.

Se vede că avem un maxim pentru r egal cu jumătate din latura pătratului înscris în cercul de rază R.

În rezumat variația lui y este următoarea:

Pentru $r = 0$, $y = 8\pi R^2$ (cilindrul s-a redus la o dreaptă); pentru $0 < r < \frac{R}{\sqrt{2}}$, y crește; pentru $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$, y este maxim; pentru $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$, y descrește; pentru $r = R$, $y = 8\pi R^2$.

II.9. *Se dă un cerc O de rază r și o coardă BC a cercului, situată la distanța $OF = x$ de centrul cercului. Tangentele în B și C la cerc întîlnesc tangenta la cerc paralelă cu BC, în punctele A și D; fie E mijlocul lui AD. Se rotește trapezul $ABCD$ în jurul lui EF și fie S și V respectiv aria totală și volumul solidului ce se naște din această rotație* (fig. 25). *Să se afle x, așa fel ca să avem*

$$S \times \frac{EF}{3} - V = \pi \frac{ar^2}{3},$$

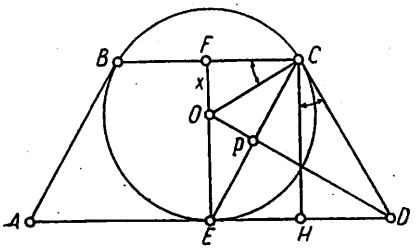


Fig. 25

unde a este un parametru oarecare. Discuție.

Soluție. Din triunghiurile dreptunghiuri OFC și EFC deducem

$$FC = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad EC = \sqrt{r^2 - x^2 + (x + r)^2} = \sqrt{2r} \times \sqrt{r + x},$$

apoi

$$EP = \frac{EC}{2} = \sqrt{2r} \times \frac{\sqrt{r + x}}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghi OEP avem $OP^2 = OE^2 - EP^2$, sau

$$OP = \sqrt{r} \times \frac{\sqrt{r - x}}{\sqrt{2}}.$$

Din triunghiul dreptunghi OED avem

$$EP^2 = OP \times PD, \text{ de unde } PD = \frac{EP^2}{OP} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \frac{r + x}{\sqrt{r - x}}.$$

Apoi

$$OD = OP + PD = \frac{r\sqrt{2r}}{\sqrt{r - x}};$$

$$ED^2 = OD^2 - r^2 = r^2 \frac{r + x}{r - x}.$$

Așadar, căpătăm

$$ED = CD = r\sqrt{\frac{r + x}{r - x}}.$$

Observaţie. Aceste rezultate se pot obţine şi pe o altă cale. În adevăr, triunghiurile OFC şi CHD sînt asemenea, pentru că $\sphericalangle CHD = \sphericalangle OFC$ ca drepte, apoi $\sphericalangle HCD = \sphericalangle FCO$ ca avînd laturile perpendiculare. Rezultă proporţionalitatea laturilor omoloage $\frac{FC}{CH} = \frac{OC}{CD} = \frac{OF}{HD}$,

sau

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x + r} = \frac{r}{CD} = \frac{x}{HD}.$$

De aici avem imediat $CD = \frac{r(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\sqrt{\frac{r + x}{r - x}}$,

valoare pe care am găsit-o mai sus.

Din rotaţia trapezului se naşte un trunchi de con circular drept. Fie R, R' razele bazelor sale şi h înălţimea.

$$\text{Avem } R = ED = r\sqrt{\frac{r + x}{r - x}}, \quad R' = FC = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$h = EF = x + r.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR') = \frac{1}{3}\pi(r + x)\left(r^2\frac{r + x}{r - x} + \right.$$

$$\left. + r^2 - x^2 + \sqrt{r^2 - x^2} \times r\sqrt{\frac{r + x}{r - x}}\right),$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(r + x)\left(r^2\frac{r + x}{r - x} + r^2 - x^2 + r(r + x)\right).$$

Efectuînd calculele, căpătăm rezultatul final

$$V = \frac{1}{3}\pi(r + x)^2\left(\frac{r^2}{r - x} + 2r - x\right).$$

Dacă G este generatoarea trunchiului, avem pentru aria totală

$$S = \pi G(R + R') + \pi R^2 + \pi R'^2 = \pi r\sqrt{\frac{r + x}{r - x}}\left(r\sqrt{\frac{r + x}{r - x}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{r^2 - x^2}\right) + \pi r^2\frac{r + x}{r - x} + \pi(r^2 - x^2) =$$

$$= \pi r\frac{(r + x)(2r - x)}{r - x} + \pi r^2\frac{r + x}{r - x} + \pi(r^2 - x^2) = \pi(r + x)\left(r\frac{2r - x}{r - x} + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2}{r - x} + r - x\right).$$

În definitiv, $S = \pi(r + x)\left(r\frac{3r - x}{r - x} + r - x\right)$.

Trecînd la datele problemei, avem

$$S \times \frac{EF}{3} - V = \frac{1}{3}\pi(r+x)^2\left(\frac{3r^2 - rx - r^2}{r-x} - r\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r(r+x)^2\left(\frac{2r-x}{r-x} - 1\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(r+x)^2}{r-x}.$$

Introducînd condiţiile problemei, avem

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(r+x)^2}{r-x} = \frac{1}{3}\pi a r^2 \text{ sau } (r+x)^2 = a(r-x).$$

Obţinem prin urmare, următoarea ecuaţie de gradul doi în x

$$x^2 + x(a+2r) + r(r-a) = 0.$$

Însemnăm cu ρ, S, P respectiv realizantul, suma şi produsul rădăcinilor, avem $\rho = b^2 - 4ac = (a+2r)^2 - 4(r^2 - ar) = a(a+8r)$

$$S = -a - 2r, \qquad P = r(r-a).$$

Discuţia completă a ecuaţiei se citeşte pe tabela următoare :

a	ρ	S	P	Rădăcinile x
$-\infty$	+	+	+	reale, ambele pozitive ;
$-8r$	0	+	+	reale, ambele pozitive ;
	−	+	+	imaginare ;
$-2r$	−	0	+	imaginare ;
	−	−	+	imaginare ;
0	+	−	+	reale, ambele negative ;
r	+	−	0	reale, una pozitivă, una negativă
$+\infty$	+	−	−	reale, una pozitivă, una negativă

Deoarece $a > 0$, tabela precedentă se poate reduce la ultimele ei rînduri.

Cum în plus, x trebuie să fie pozitiv, rezultă că trebuie să avem $a > r$.

II.10. *Pe o dreaptă AB se descrie un semicerc ; în punctul B se duce tangenta BT ; să se găsească pe această tangentă un punct M aşa fel ca, unindu-l cu A şi însemnînd cu N punctul*

de întîlnire al lui AM cu semicercul, să avem, dacă figura se rotește în jurul lui AB, următoarea relație: volumul născut de ANB este egal cu volumul născut de MBN (fig. 26)

Soluție. Să punem $MB = x$. Cînd figura ANB se rotește în jurul lui AB, se naște un con de volum V_1 plus un segment sferic de volum V_2. Cînd figura MBN se rotește în jurul lui

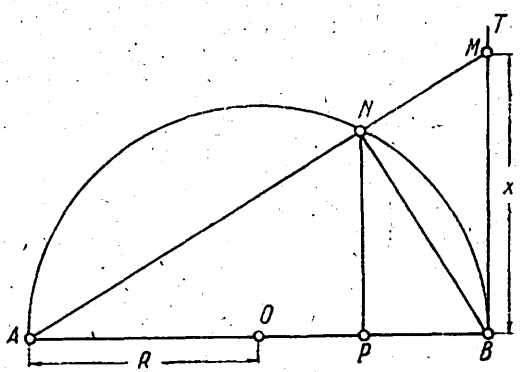


Fig. 26

AB, se obține un trunchi de con de volum V_3 mai puțin volumul V_2. Trebuie să avem, după datele problemei

$$V_1 + V_2 = V_3 - V_2, \quad \text{sau} \quad V_1 + 2V_2 = V_3. \qquad (1)$$

Să calculăm elementele solidelor puse în evidență mai sus. Din triunghiul dreptunghi MBA, rezultă $MA = \sqrt{4R^2 + x^2}$ unde s-a însemnat cu R raza semicercului. Din același triunghi dreptunghi avem

$$AB^2 = AM \times AN; \text{ de unde } AN = \frac{4R^2}{\sqrt{4R^2 + x^2}}.$$

Din triunghiul dreptunghi ANB avem $AN^2 = AB \times AP$; prin urmare $AP = \frac{8R^3}{4R^2 + x^2}$; apoi $PB = AB - AP = \frac{2Rx^2}{4R^2 + x^2}$.

Din triunghiul dreptunghi ANB avem

$$PN^2 = PA \times PB = \frac{16R^4x^2}{(4R^2 + x^2)^2}$$

sau

$$PN = \frac{4R^2x}{4R^2 + x^2}; \quad OP = OB - PB = \frac{R(4R^2 - x^2)}{4R^2 + x^2}.$$

O dată aceste elemente calculate, să calculăm volumele specificate mai sus. Din rotația triunghiului dreptunghi ANP în jurul lui AB, se naște conul de volum V_1. Avem

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot NP^2 \times AP = \frac{1}{3}\pi \times \frac{128R^7x^2}{(4R^2+x^2)^3}.$$

Volumul V_2 al segmentului sferic este egal cu volumul sectorului sferic corespunzător, minus volumul conului născut din rotația triunghiului dreptunghi ONP în jurul lui AB. Așadar

$$V_2 = 2\pi R \times PB \times \frac{1}{3}R - \frac{1}{3}\pi \times NP^2 \times OP =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{x^2}{4R^2+x^2} - 4R^2x^2\frac{4R^2-x^2}{(4R^2+x^2)^3}\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\,4\pi R^3x^4\frac{12R^2+x^2}{(4R^2+x^2)^3}.$$

Să calculăm volumul V_3 al trunchiului de con circular născut din rotația trapezului $MNPB$, în jurul lui AB. Vom avea

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \times PB\,(MB^2 + NP^2 + MB \times NP) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{2Rx^2}{4R^2+x^2} \times \left(x^2 + \frac{16R^4x^2}{(4R^2+x^2)^2} + \frac{4R^2x^2}{4R^2+x^2}\right),$$

$$V_3 = \frac{2}{3}\pi Rx^4\frac{48R^4+12R^2x^2+x^4}{(4R^2+x^2)^3}.$$

Introducînd aceste valori în relația (1), făcînd toate simplificările și reducerile și eliminînd soluția $x = 0$, obținem ecuația problemei sub forma

$$x^6 + 8R^2x^4 - 64R^6 = 0 \qquad (2)$$

sau

$$(x^2 + 4R^2)(x^4 + 4R^2x^2 - 16R^4) = 0.$$

Prima paranteză redusă la zero ne dă valori imaginare pentru x. Rămîne

$$x^4 + 4R^2x^2 - 16R^4 = 0, \qquad (3)$$

$$x^2 = -2R^2 \pm \sqrt{4R^4 + 16R^4} = 2R^2(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Înlăturînd soluțiile negative, obținem în cele din urmă pentru x valoarea

$$x = R\sqrt{2(-1+\sqrt{5})}. \qquad (4)$$

Să procedăm acum pe cale trigonometrică și să punem $\sphericalangle MAB = \vartheta$. Din triunghiul dreptunghi MAB avem $MB = 2R \operatorname{tg} \vartheta$.

Din triunghiul dreptunghi ANB reiese $AN = 2R\cos\vartheta$.

Triunghiul dreptunghi ANP ne dă $AP = AN\cos\vartheta = 2R\cos^2\vartheta$. Apoi avem următoarele relații

$$PB = 2R - 2R\cos^2\vartheta = 2R(1-\cos^2\vartheta) = 2R\sin^2\vartheta.$$

Apoi tot din triunghiul ANP avem

$$NP = AN\sin\vartheta = 2R\sin\vartheta\cos\vartheta = R\sin 2\vartheta.$$

Apoi din nou

$$OP = OB - PB = R - 2R\sin^2\vartheta = R(1-2\sin^2\vartheta) = R\cos 2\vartheta.$$

Vom căpăta, după oarecare calcule simple:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\vartheta \cos^2\vartheta;$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^3 (4\sin^2\vartheta - \sin^2 2\vartheta\cos 2\vartheta);$$

$$V_3 = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2\vartheta(4\operatorname{tg}^2\vartheta + \sin^2 2\vartheta + 2\operatorname{tg}\vartheta\sin 2\vartheta).$$

Înlocuind în ecuația (1). vom avea, după efectuarea tuturor calculelor, ecuația $\cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta$, sau

$$\cos^4\vartheta + \cos^2\vartheta - 1 = 0: \quad \text{deci } \cos^2\vartheta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Înlăturînd valoarea negativă a lui $\cos^2\vartheta$ și luînd numai valoarea pozitivă pentru $\cos\vartheta$, vom avea:

$$\cos^2\vartheta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \cos\vartheta = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad (5)$$

$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)},$$

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{2(-1+\sqrt{5})}{4},\quad \operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{2(-1+\sqrt{5})}{2}}.$$

Cum $MB = x = 2R \operatorname{tg} \vartheta = R\sqrt{2(-1+\sqrt{5})}$, se vede că am regăsit şi pe calea aceasta valoarea (4) a lui x. Să calculăm acum unghiul ϑ.

Din (6) rezultă $\sin \vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{2(3-\sqrt{5})}$. Cum $\sqrt{5} = 2{,}2361$, avem

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1{,}527\,8}}{2}; \qquad \lg \sin \vartheta = \frac{1}{2}\lg 1{,}527\,8 - \lg 2.$$

$$\lg 1{,}527\,8 = 0{,}18407 \quad , \frac{1}{2}\lg 1{,}527\,8 = 0{,}092\,03,$$

$$-\lg 2 = \overline{1}{,}69897, \quad \lg \sin \vartheta = 1{,}79100.$$

Rezultă $\vartheta = 28°10'18'', 35$.

II.11. *Se dă un trapez isoscel $ABCD$, fie I punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD, fie $AB = 2a$, $CD = 2b$, $(a > b)$; trapezul se roteşte în jurul medianei MIN şi se cere:*

1. *Să se calculeze raportul volumului generat de acest trapez, către suma volumelor conurilor generate de triunghiurile AMI şi INC* (fig. 27);

2. *Acest raport fiind egal cu m şi a fiind dat, ce valoare trebuie să aibă b.*

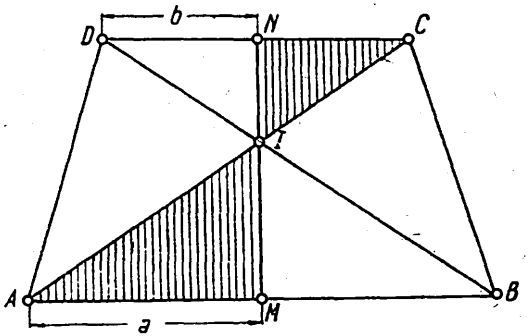


Fig. 27

Soluţie. 1. Să punem deocamdată $MN = h$; din triunghiurile asemenea AMI şi INC, deducem $\frac{IM}{IN} = \frac{MA}{NC}$ sau $\frac{IM}{IN} = \frac{a}{b}$.

De aici deducem $\frac{IM}{a} = \frac{IN}{b} = \frac{IM + IN}{a + b} = \frac{h}{a + b}$.

$$IM = \frac{ah}{a+b}, \quad IN = \frac{bh}{a+b}.$$

Să însemnăm cu V_1 şi V_2 volumele conurilor născute din rotirea triunghiurilor dreptunghice AMI şi INC în jurul lui MN şi cu V volumul trunchiului de con născut prin rotirea trapezului isoscel $ABCD$ tot în jurul lui MN. Avem

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times AM^2 \times MI = \frac{1}{3}\pi h \times \frac{a^3}{a+b},$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \times NC^2 \times IN = \frac{1}{3}\pi h \times \frac{b^3}{a+b},$$

$$V = \frac{1}{2}\pi h\,(AM^2 + NC^2 + AM \times NC) = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + b^2 + ab),$$

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi h \times \frac{a^3+b^3}{a+b} = \frac{1}{3}\pi h\,(a^2 - ab + b^2).$$

$$\frac{V}{V_1 + V_2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}.$$

2. Să punem atunci

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = m;$$

$$a^2 + ab + b^2 = m\,(a^2 - ab + b^2),$$

$$b^2(m - 1) - ab\,(m + 1) + a^2(m - 1) = 0.$$

Împărţim cu a^2 şi punem $\frac{b}{a} = x$; rezultă

$$(m - 1)x^2 - (m + 1)\,x + m - 1 = 0. \qquad (1)$$

Cum $b < a$, rezultă că $x < 1$ şi, cum x trebuie să fie pozitiv, reiese că $0 < x < 1$. Ecuaţia (1) trebuie să aibă rădăcinile cuprinse între (0,1). Să facem transformarea $y = \frac{x}{x-1}$. Pentru $0 < x < 1$, trebuie $y < 0$. Fie x', x'' rădăcinile ecuaţiei (1) şi y', y'' rădăcinile ecuaţiei transformate. Trebuie ca $y' = \frac{x'}{x'-1} < 0$, $y'' = \frac{x''}{x''-1} < 0$.

De unde rezultă că va trebui să avem $y'y'' > 0, y' + y'' < 0$.

De mai sus deducem $x = \frac{y}{y-1}$ și, înlocuind în ecuația (1), vom căpăta ecuația

$$(m-3)y^2 - (m-3)y + m - 1 = 0. \qquad (2)$$

Să însemnăm respectiv cu R, S, P realizantul, suma și produsul rădăcinilor ecuației (2). Avem, cum se vede mai jos

$$R = (m-3)^2 - 4(m-3)(m-1) = (m-3)(-3m+1)$$

$$S = 1, \; P = \frac{m-1}{m-3}.$$

Discuția ecuației (2) se rezumă în tabela

m	R	S	P	rădăcinile y
$-\infty$				
	$-$	$+$	$+$	imaginare;
$\frac{1}{3}$				
	$+$	$+$	$+$	reale, ambele pozitive;
1				
	$+$	$+$	$-$	reale, una negativă și una pozitivă;
3				
	$-$	$+$	$+$	imaginare.
$+\infty$				

Prin urmare, ecuația (1) are o singură rădăcină admisibilă

$$0 < x < 1, \text{ cînd } 1 < m < 3.$$

Observație. Să punem $f(x) = (m-1)x^2 - (m+1)x + m - 1$.
Formăm $f(0)$ și $f(1)$ și căpătăm $f(0) = m - 1$, $f(1) = m - 3$.
Cînd $f(0) f(1) = (m-1)(m-3) < 0$, ecuația (1) are două rădăcini distincte, dintre care una cuprinsă în intervalul (0,1).
Deci cînd $(m-1)(m-3) < 0$, adică $1 < m < 3$, ecuația (1) va avea o rădăcină ξ cuprinsă între 0 și 1, $0 < \xi < 1$. Am regăsit deci același rezultat.

II.12. *Se dă un trapez dreptunghi $ABCD$. Să se afle înălțimea AB și bazele BC și AD, cunoscînd lungimea l a laturii oblice CD, aria a^2 a trapezului și volumul $\frac{4}{3}\pi b^3$ al solidului născut din rotația trapezului în jurul lui CD.*

Soluție. Notăm cu F intersecția laturilor neparalele AB, CD, cu E piciorul perpendicularei duse din C pe AD și cu A', B' picioarele perpendicularelor duse respectiv din A, B pe latura CD (fig. 28). Mai facem încă următoarele notații

$$AB = x,\ BC = y,\ AD = z.$$

Teorema lui *Pitagora* aplicată la triunghiul CDE dă

$$x^2 + (z - y)^2 = l^2. \quad (1)$$

Aria trapezului este dată de formula

$$S = \frac{x(y+z)}{2}.$$

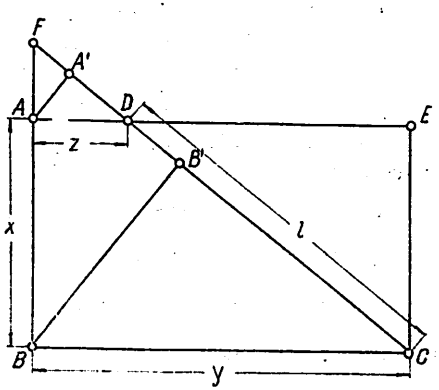


Fig. 28

Conform problemei, trebuie să avem

$$x(y+z) = 2a^2. \quad (2)$$

Exprimînd a doua condiție a problemei, avem

$$\frac{1}{3}\pi BB'^2 \times CF - \frac{1}{3}\pi AA'^2 \times DE = \frac{4}{3}\pi b^3,$$

sau

$$BB'^2 \times CF - AA'^2 \times DF = 4b^3. \quad (3)$$

Triunghiurile asemenea ADF, FBC ne dau

$$\frac{DF}{DF+l} = \frac{z}{y},\ DF = \frac{lz}{y-z},\ CF = DF + l = \frac{ly}{y-z}.$$

Triunghiurile asemenea $AA'F$, CDE ne dau

$$\frac{AA'}{y+z} = \frac{AF}{l},\ AA' = AF \times \frac{y-z}{l}.$$

Dar se vede ușor că avem relația $\frac{AF}{x} = \frac{DF}{l}$, $AF = \frac{zx}{y-z}$.

Deci, $AA' = \frac{xz}{l}$. În mod analog se deduce $BB' = \frac{yx}{l}$.

Ecuația (3) devine $\frac{x^2(y^3 - z^3)}{l(y-z)} = 4b^3$ sau

$$x^2(y^2 + z^2 + yz) = 4lb^3. \quad (4)$$

Ecuațiile (1), (2), (4) formează sistemul

$$x^2 + (y - z)^2 = l^2, \quad x(y + z) = 2a^2, \quad x^2(y^2 + z^2 + yz) = 4lb^3.$$

Să rezolvăm acest sistem; îl scriem sub forma:

$$x^2 + (y + z)^2 - 4yz = l^2, \quad x(y + z) = 2a^2,$$
$$x^2[(y + z)^2 - yz] = 4lb^3.$$

Acum notăm pentru prescurtare, $y + z = u$, $yz = v$. Sistemul devine

$$x^2 + u^2 - 4v = l^2, \quad ux = 2a^2, \quad -vx^2 + u^2x^2 = 4lb^3.$$

Ținînd seama de a doua ecuație, sistemul se scrie

$$x^2 + u^2 - 4v = l^2, \quad ux = 2a^2, \quad vx^2 = 4(a^4 - lb^3).$$

Eliminînd pe v, ne rămîne sistemul

$$ux = 2a^2, \quad x^2(x^2 + u^2 - l^2) = 16(a^4 - lb^3).$$

Eliminînd pe u ne rămîne o ecuație în x,

$$x^2\left(x^2 + \frac{4a^4}{x^2} - l^2\right) = 16(a^4 - lb^3)$$

sau

$$x^4 - l^2x^2 - 12a^4 + 16lb^3 = 0.$$

Aceasta este o ecuație bipătrată. Rezolvînd-o avem:

$$x^2 = \frac{1}{2}(l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64lb^3}).$$

Observăm că trebuie să avem $x \leqslant l$, deci $x^2 \leqslant l^2$. Aceasta revine la a scrie:

$$l^2 \pm \sqrt{l^2 + 48a^4 - 64lb^3} \leqslant 2l^2 \text{ sau } \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64lb^3} \leqslant l^2;$$
$$l^4 + 16(3a^4 - 4lb^3) \leqslant l^4, \quad 16(3a^4 - 4lb^3) \leqslant 0,$$
$$3a^4 - 4lb^3 \leqslant 0. \qquad (5)$$

Aceasta este condiția ca rădăcinile x să fie reale.

Rezultă că $l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64lb^3} > 0$, deci avem pentru x două rădăcini

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64lb^3}}.$$

Deducem apoi ușor :

$$y + z = u = \frac{2a^2}{x} = 2a^2 \sqrt{2} / \sqrt{l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64\,lb^3}} ;$$

$$yz = v = 4\,\frac{a^4 - lb^3}{x^2} = 8\,\frac{a^4 - lb^3}{l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64\,lb^3}}.$$

Deci y și z sînt rădăcinile ecuației

$$t^2 - \frac{2a^2\sqrt{2}}{\sqrt{l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64\,lb^3}}}\,t + \frac{8\,(a^4 - lb^3)}{l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64\,lb^3}} = 0.$$

Condiția ca rădăcinile acestei ecuații să fie reale se scrie :

$$\frac{8a^4 - 32\,(a^4 - lb^3)}{l^2 \pm \sqrt{l^4 + 48a^4 - 64\,lb^3}} \geqslant 0.$$

Numitorul acestei fracții fiind pozitiv, rămîne ca și numărătorul să fie pozitiv, deci :

$$8a^4 - 32\,(a^4 - lb^3) \geqslant 0, \text{ sau } -3a^4 + 4lb^3 \geqslant 0, \; 3a^4 - 4lb^3 \leqslant 0$$

Am regăsit condiția (5).

II.13. *Pe prelungirea diametrului AB al unui semicerc $AMCB$ cu raza R, se ia un punct P, la distanța $OP = x$ de centru. Din P se duce tangenta PC la semicerc. Figura $AMCP$ se rotește în jurul lui AB.*

1. *Să se afle aria și volumul solidului născut* (fig. 29).

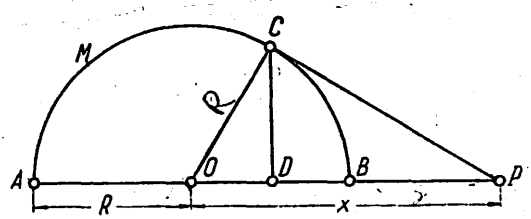


Fig. 29

2. *Volumul fiind de m ori mai mare decît cel al sferei de rază R, să se calculeze x. Cîte soluții acceptabile sînt?*

3. *Punînd $m = 1/\sin^2\alpha$, să se afle x în funcție de α.*

Soluție. 1. Notăm cu D proiecția lui C pe diametrul AB. Aria solidului rezultat din rotirea figurii $AMCP$ în jurul lui

AB se compune din aria calotei sferice AMC şi din aria laterală a conului care are ca generatoare pe CP:

aria calotei $AMC = 2\pi R \times AD$,

aria laterală a conului $PCD = \pi \times CD \times CP$.

Pe figură se vede că $AD = R + OD$, iar din triunghiul dreptunghi OCP scoatem: $OD = \frac{OC^2}{OP} = \frac{R^2}{x}$.

Deci, aria calotei $AMC = 2\pi R\left(R + \frac{R^2}{x}\right) = 2\pi R^2 \frac{x+R}{x}$

Din triunghiul dreptunghi OCD scoatem

$$CD^2 = R^2 - \frac{R^4}{x^2} = \frac{R^2(x^2 - R^2)}{x^2}, \quad CD = \frac{R}{x}\sqrt{x^2 - R^2},$$

iar din triunghiul dreptunghi COP scoatem $CP = \sqrt{x^2 - R^2}$

Deci aria laterală a conului $PCD = \frac{\pi R(x^2 - R^2)}{x}$.

Deci aria S a solidului din problemă este

$$S = \frac{2\pi R^2(x+R)}{x} + \frac{\pi R(x^2 - R^2)}{x} = \frac{\pi R(x+R)(2R + x - R)}{x},$$

$$S = \frac{\pi R(x+R)^2}{x}.$$

Volumul V al solidului din problemă se compune din volumul sectorului sferic AMC şi din volumul conurilor OCD, CDP.

Volumul sectorului $AMC = \frac{1}{3} R \times$ aria calotei $AMC =$

$= \frac{2\pi R^3(x+R)}{3x}$; volumul conului OCD + volumul conului $CDP =$

$= \frac{\pi}{3} \times CD^2 \times OP = \frac{1}{3}\pi \times \frac{R^2}{x^2}(x^2 - R^2)\,x = \frac{\pi R^2(x^2 - R^2)}{3x}$.

$$V = \frac{2\pi R^3(x+R)}{3x} + \frac{\pi R^2(x^2 - R^2)}{3x} = \frac{1}{3x}[\pi R^2(x+R)(2R + x - R)],$$

$$V = \frac{\pi R^2(x+R)^2}{3x}.$$

Se observă că avem relaţia $V = \frac{1}{3} R \times S$, care se poate stabili şi direct considerînd conturul mixtiliniu $AMCP$, care se roteşte în jurul lui AP.

2. Scriind acum condiția din problemă, avem ecuația $V = m \times \frac{4}{3}\pi R^3$. Înlocuind pe V cu valoarea lui, obținem

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{(x+R)^2}{x} = \frac{1}{3}\pi R^2 \times 4mR,$$

sau

$$\frac{(x+R)^2}{x} = 4mR, \quad (x+R)^2 - 4mRx = 0,$$

$$x^2 - 2R(2m-1)x + R^2 = 0.$$

Rezolvînd această ecuație, avem

$$x = R\,[2m - 1 \pm \sqrt{(2m-1)^2 - 1}].$$

Deoarece $\sqrt{(2m-1)^2 - 1} < 2m - 1$, înseamnă că ambele rădăcini convin. Scriind pe x sub forma

$$x = R\,[2m - 1 \pm 2\sqrt{m(m-1)}],$$

se vede că x este real cînd $m \geqslant 1$ (m este pozitiv).

Pentru fiecare $m > 1$, problema admite deci două soluții.

3. Punînd $m = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, avem $m - 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Deci

$$x = R\left\{\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \pm \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right\}, \quad x = \frac{R(1\pm\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha},$$

sau

$$x_1 = R\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} \qquad x_2 = R\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

II.14. *Un triunghi isoscel este înscris într-un cerc de rază R. Care trebuie să fie înălțimea lui, pentru ca, rotindu-se în jurul paralelei la bază dusă prin vîrf, acest triunghi să genereze un volum care să fie:*

1. *egal cu volumul generat prin rotirea aceluiași triunghi în jurul înălțimii;*
2. *maxim.*

Soluție. 1. Notăm cu H' punctul în care înălțimea AH a triunghiului isoscel ABC, $AB = AC$, intersectează a doua oară cercul său circumscris. Volumul V, generat prin rotirea

triunghiului ABC în jurul paralelei dusă prin A la BC, are expresia

$$V = 2\pi \frac{2AH}{3} \times BC \times \frac{AH}{2}, \quad V = 2\pi AH^2 \times \frac{BC}{3}.$$

Însemnăm necunoscuta problemei $AH = x$; în triunghiul dreptunghi ACH', avem $HC^2 = HA \times HH'$.

$$HC^2 = x(2R - x), \qquad HC = \sqrt{x(2R - x)}.$$

Mai departe avem $BC = 2HC$, deci

$$V = \frac{4}{3}\pi x^2 \sqrt{x(2R-x)}.$$

Volumul V', generat prin rotirea triunghiului ABC în jurul înălțimii AH, are expresia

$$V' = \frac{\pi}{4} BC^2 \times \frac{AH}{3}, \quad V' = \frac{1}{3}\pi x^2 (2R - x).$$

Prin ipoteză $V = V'$, deci

$$4x^2 \sqrt{x(2R - x)} = x^2 (2R - x).$$

Suprimînd soluțiile banale $x = 0$, $x = 2R$, rămîne ecuația

$$4\sqrt{x} = \sqrt{2R - x}, \quad 16x = 2R - x,$$

$$x = AH = \frac{2R}{17}.$$

2. Sîntem conduși să studiem variația funcției

$$y = x^2 \sqrt{x(2R - x)}.$$

Derivata este

$$y' = \frac{x^2 (5R - 3x)}{\sqrt{x(2R-x)}}$$

și se anulează pentru $x = \frac{5R}{3}$ (rădăcina $x = 0$ este exclusă), trecînd dela plus la minus, deci pentru această valoare avem un maxim; valoarea maximă a volumului este egală cu

$$100\pi R^3 \frac{\sqrt{5}}{81}.$$

II.15. *Se consideră volumul cuprins între două sfere concentrice.*

1. *Care trebuie să fie raportul razelor pentru ca acest volum să fie egal cu* $\frac{7}{3}$ *din volumul unui cilindru avînd ca bază un cerc cu raza egală cu raza sferei mari și drept înălțime raza sferei mici.*

2. *Care trebuie să fie densitatea materiei din care este făcut acest corp pentru ca, băgat în apă, să se afunde pînă la* $\frac{3}{4}$ *din diametru?*

Soluție. 1. Fie R raza sferei mari, r raza sferei mici. Ecuația problemei este

$$\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} = 7\pi R^2 \frac{r}{3},$$

sau

$$4\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 7\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 4 = 0.$$

Punînd $\frac{R}{r} = x$ avem ecuația $4x^3 - 7x^2 - 4 = 0$.

Această ecuație admite o singură rădăcină reală $x = 2$, celelalte două rădăcini sînt date de ecuația $4x^2 + x + 2 = 0$ și sînt imaginare.

Deci raportul razelor trebuie să fie $\frac{R}{r} = 2$.

2. Cînd afundăm corpul în apă, greutatea totală a corpului este egală cu greutatea volumului de apă dizlocat; acest volum este egal cu volumul sferei mari din care se scade volumul segmentului sferic rămas la suprafață, înălțimea segmentului fiind egală cu $\frac{R}{2}$. Însemnînd cu δ densitatea corpului, ecuația care determină pe δ este următoarea

$$\frac{7}{3}\pi R^2 r\delta = \frac{4}{3}\pi R^3 - \left[2\pi R\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{3}\right) - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3R^2}{4}\right)\left(\frac{R}{2}\right)\right],$$

sau

$$\frac{7\pi R^2 r\delta}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{5\pi R^3}{24}, \quad 56r\delta = 27R.$$

Dar $\frac{R}{r} = 2$, deci $\delta = \frac{27\times 2}{56} = \frac{54}{56} = 0{,}96$.

II.16. *O placă dreptunghiulară $ABCD$, în care latura mare $AB = CD = 2a$ și latura mică $AD = BC = b$, se rotește în jurul diagonalei AC, care prin ipoteză face cu latura mare AB un unghi de 30°.*

Se cere să se arate care va fi forma cutiei de volum minim în care se poate roti această placă dreptunghiulară și care este volumul și aria acestei cutii.

Soluție. Să găsim mai întîi relația dintre a și b; din triunghiul dreptunghi ABC deducem

$$BC = AB \operatorname{tg} \sphericalangle BAC \text{ sau } b = 2a \operatorname{tg} 30°,\ 2a = b\sqrt{3},\ 4a^2 = 3b^2.$$

Urmează că $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + b^2 = 3b^2 + b^2$, $AC = 2b$. Dacă însemnăm prin O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD, deducem că triunghiurile egale AOD și BOC sînt echilaterale pentru că au laturile egale cu b.

Dacă dreptunghiul $ABCD$ se rotește de 180° în jurul diagonalei AC, el vine în poziția $AD'CB'$, simetrică cu poziția $ABCD$ în raport cu AC și triunghiurile egale AOD' și $B'OC$ sînt echilaterale; urmează că și triunghiurile egale și isoscele BOD' și $B'OD$ sînt echilaterale pentru că unghiurile la vîrfuri BOD' și $B'OB$ sînt egale cu 60°, ceea ce se vede prin socotirea unghiurilor din jurul punctului O. În definitiv, exagonul $AD'BCB'D$ este regulat pentru că laturile sale sînt toate egale cu b.

Fie E intersecția dreptelor AB și CD', fie E' intersecția dreptelor CD și AB', punctele E și E' sînt evident simetrice în raport cu diagonala AC și cu centrul O.

Cutia de volum minim în care se poate roti dreptunghiul $ABCD$ de 360° în jurul diagonalei AC are forma solidului generat de pentagonul concav $AD'EBC$ prin rotirea lui de 360° în jurul lui AC. Cutia admite un plan de simetrie, planul dus prin O perpendicular pe AC.

Volumul cutiei este deci egal cu dublul volumului generat de patrulaterul $AOED'$ în jurul lui AO, iar aria cutiei este egală cu dublul ariei generate de linia poligonală $AD'E$ prin rotirea în jurul lui AO.

Fie F proiecția punctului D' pe AO; din triunghiul echilateral AOD' deducem

$$AF = FO = \frac{b}{2},\quad FD' = a,\quad OE = D'E = \frac{D'C}{3} = \frac{2a}{3}.$$

Patrulaterul $AD'EO$ se descompune în triunghiul dreptunghi AFD', ale cărui laturi sînt egale cu

$$AF = \frac{b}{2}, \quad FD' = a, \quad AD' = b,$$

și în trapezul $FD'EO$ ale cărui laturi sînt egale cu

$$FD' = a, \quad D'E = \frac{2a}{3}, \quad EO = \frac{2a}{3}, \quad FO = \frac{b}{2}.$$

Volumul conului generat de triunghiul AFD' prin rotirea lui în jurul catetei AF este egal cu

$$\frac{\pi FD'^2 \times FA}{3} = \frac{\pi a^2 \frac{b}{2}}{3} = \pi a^2 \frac{b}{6};$$

volumul trunchiului de con generat de trapezul $ED'FO$ prin rotirea lui în jurul laturii FO este egal cu

$$\frac{\pi FO \times (FD'^2 + FD' \times OE + OE^2)}{3} =$$

$$= \pi \frac{b}{2} \frac{\left\{a^2 + a \times \frac{2a}{3} + \left(\frac{2a}{3}\right)^2\right\}}{3} = 19\pi a^2 \frac{b}{54},$$

Volumul V al cutiei este deci, ținînd seama de relația $4a^2 = 3b^2$,

$$V = 2\pi a^2 b \left(\frac{1}{6} + \frac{19}{54}\right) = 28\pi a^2 \frac{b}{27} = 7\pi \frac{b^3}{9}.$$

Aria laterală a conului este egală cu

$$AD' \times \pi FD' = \pi ba,$$

iar aria laterală a trunchiului de con este egală cu

$$D'E \cdot \pi (FD' + OE) = \pi \left(\frac{2a}{3}\right)\left(a + \frac{2a}{3}\right) = 10\pi \frac{a^2}{9}.$$

Aria S a cutiei este deci

$$S = 2\pi ab + 20\pi \frac{a^2}{9} = \left(\frac{5}{3} + \sqrt{3}\right)\pi b^2.$$

II.17. *Se dă un plan P și două puncte exterioare planului, A și B. Se duc perpendicularele AA' și BB' pe plan și fie Γ cercul din planul P al cărui diametru este segmentul $A'B'$. Să se găsească pe cercul Γ un punct M astfel ca segmentele $A'A$ și $B'B$ să fie văzute din M sub același unghi, adică $\sphericalangle A'MA = \sphericalangle B'MB$.*

Soluție. Triunghiurile $MA'A$ și $MB'B$ sînt dreptunghice respectiv în A' și B' și sînt asemenea pentru că au unghiurile ascuțite din M egale; rezultă că laturile lor sînt proporționale, adică

$$\frac{MA'}{MB'} = \frac{A'A}{B'B} = \frac{AM}{BM}.$$

Însă punctele A și B fiind date, distanțele lor AA' și BB' la planul P' au valori determinate, deci raportul $\frac{AA'}{BB'}$ are o valoare determinată k; rezultă că

$$\frac{MA'}{MB'} = k = \text{constant}.$$

Însă locul geometric al punctelor M din planul P, ale căror distanțe MA' și MB' la două puncte fixe din plan, A' și B', sînt într-un raport constant k, este un cerc C și anume cercul cu diametrul RS, unde R și S sînt punctele care împart segmentul $A'B'$ în interior și în exterior, în raportul k, adică în valoare absolută

$$\frac{RA'}{RB'} = \frac{SA'}{SB'} = k = \frac{AA'}{BB'}.$$

Punctul M găsindu-se și pe cercul Γ și pe cercul C, se găsește la intersecția lor și problema admite *două soluții*, pentru că cercurile Γ și C sînt evident secante.

II.18. 1. *Se dă o prismă cu baza un triunghi ABC de arie S și cu muchiile $AA' = h_1$, $BB' = h_2$, $CC' = h_3$, perpendiculare pe bază; să se calculeze volumul solidului.*

2. *Să se calculeze aria totală a solidului în cazul particular al triunghiului ABC echilateral de latură a și $h_1 = 3a$, $h_2 = 4a$, $h_3 = 5a$.*

Soluție 1. Putem presupune, pentru motive de simetrie, că

$$h_1 \leqslant h_2 \leqslant h_3, \text{ fie } h_1 < h_2 < h_3.$$

Ducem prin A' planul paralel cu baza ABC, el taie muchiile BB' şi CC' în B'' şi C''; planul $A'B''C''$ împarte solidul dat într-o prismă dreaptă $ABCA'B''C''$ şi o piramidă cu vîrful în A' şi baza un trapez $B'B''C''C'$.

Volumul prismei este egal cu $S \times h_1$; pentru a calcula volumul piramidei, observăm că înălţimea piramidei, adică perpendiculara coborîtă din A' pe baza $B'B''C''C'$, este situată în planul triunghiului de nivel $A'B''C''$ şi este egală cu înălţimea acestui triunghi, fie h mărimea ei, pentru că secţiunea de nivel $A'B''C''$ este perpendiculară pe feţele verticale ale solidului.

Trapezul $B'B''C''C'$ are înălţimea egală cu $B''C''$, fie a_0 mărimea ei, pentru că fiind paralelă cu BC, este perpendiculară pe muchiile BB' şi CC'; baza mică a trapezului este $B''B' = h_2 - h_1$, iar baza mare, $C''C' = h_3 - h_1$; aria trapezului este egală cu

$$\{(h_2 - h_1) + (h_3 - h_1)\}\frac{a_0}{2},$$

iar volumul piramidei,

$$\frac{h}{3}\{(h_2 - h_1) + (h_3 - h_1)\}\frac{a_0}{2} = (h_2 + h_3 - 2h_1)\frac{a_0 h}{6}.$$

Însă aria triunghiului $A'B''C''$ este egală cu $\frac{ha_0}{2} = S$, pentru că triunghiurile ABC şi $A'B''C''$ sînt egale; rezultă că volumul piramidei este egal cu

$$(h_2 + h_3 - 2h_1)\frac{S}{3},$$

iar volumul V al solidului este

$$V = S \times h_1 + (h_2 + h_3 - 2h_1)\frac{S}{3} = (h_1 + h_2 + h_3)\frac{S}{3},$$

adică a treia parte din volumul prismei drepte a cărei bază este egală cu S, iar muchiile egale cu $(h_1 + h_2 + h_3)$.

2. Aria totală se compune din ariile celor două triunghiuri de bază şi a celor trei trapeze laterale; fie

$$a_1 = A'B', \quad a_2 = B'C', \quad a_3 = C'A'.$$

lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$. În triunghiul dreptunghi $A'B''B'$ avem :

$$A'B''=AB=a,\ B''B'=BB'-AA'=4a-3a=a,$$
$$A'B'^2=A'B''^2+B''B'^2, a_1^2=a^2+a^2,\ a_1=a\sqrt{2}.$$

Ducînd paralela $B'C'''$ la BC, s-a format triunghiul dreptunghi $B'C'''C'$ în care :

$$B'C'''=BC=a,\ C'''C'=CC'-BB'=5a-4a=a,$$
$$B'C'^2=B'C'''^2+C'''C'^2,\ a_2^2=a^2+a^2,\ a_2=a\sqrt{2}.$$

În triunghiul dreptunghi $A'C''C'$ avem :

$$A'C''=AC=a,\ C''C'=CC'-AA'=5a-3a=2a,$$
$$A'C'^2=A'C''^2+C''C'^2,\ a^2{}_3=a^2+4a^2,\ a_3=a\sqrt{5}.$$

Triunghiul $A'B'C'$ este deci isoscel în B', iar înălțimea lui, coborîtă din vîrful B' pe baza $A'C'$, este egală cu

$$\sqrt{2a^2-\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Aria triunghiului echilateral ABC este

$$\frac{a\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Aria triunghiului isoscel $A'B'C'$ este

$$\frac{a\sqrt{5}\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=a^2\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Aria trapezului $ABB'A'$ este $(3a+4a)\frac{a}{2}=\frac{7a^2}{2}$.

Aria trapezului $BCC'B'$ este $(4a+5a)\frac{a}{2}=\frac{9a^2}{2}$.

Aria trapezului $CAA'C'$ este $(5a+3a)\frac{a}{2}=4a^2$, pentru că toate trei trapezele au înălțimile egale cu a. Aria totală a solidului este egală cu

$$a^2\frac{\sqrt{3}}{4}+a^2\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{7a^2}{2}+\frac{9a^2}{2}+4a^2=(1+16\sqrt{3}+\sqrt{5})\,a^2\frac{\sqrt{3}}{4},$$

adică raportul dintre aria totală a solidului și aria triunghiului de bază ABC este egal cu numărul irațional.

$$1 + 16\sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

II.19. *Să se ducă un plan care să taie o sferă, de rază R, în două calote, știind că raportul ariilor lor este egal cu $k = \frac{1}{3}$. Să se calculeze raportul dintre volumele acestor două calote sferice.*

Soluție. Fie h înălțimea unei calote și deci $(2R-h)$ înălțimea celeilalte. Ariile S_1, S_2 și volumele V_1, V_2 ale celor două calote sînt date de formulele

$$S_1 = 2\pi Rh, \quad S_2 = 2\pi R(2R - h);$$

$$V_1 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right), \quad V_2 = \pi(2R - h)^2\left\{R - \frac{2R - h}{3}\right\}.$$

Prin ipoteză $\frac{S_1}{S_2} = k$, deci

$$\frac{h}{2R - h} = k, \quad h = \frac{2Rk}{1 + k}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left\{\frac{h}{2R - h}\right\}^2\left\{\frac{3R - h}{R + h}\right\} = k^2\frac{3R - h}{R + h},$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^2\frac{3 + k}{1 + 3k}.$$

În cazul particular $k = \frac{1}{3}$, $h = \frac{R}{2}$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{27}$.

Observație. Dacă notăm $\lambda = S_1/S_2$, $\mu = V_1/V_2$, am găsit

$$\mu = \lambda^2\frac{3 + \lambda}{1 + 3\lambda},$$

adică μ este o funcție rațională de raportul λ. Se poate pune problema inversă; cunoscînd raportul μ al volumelor calotelor sferice, să se determine raportul λ al ariilor lor. Relația de legătură dintre λ și μ se mai scrie

$$f(\lambda) \equiv \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\mu\lambda - \mu = 0,$$

adică λ este rădăcina acestei ecuații de gradul al treilea. Ecuația derivată $3\lambda^2 + 6\lambda - 3\mu = 0$ are rădăcinile

$$-1 - \sqrt{1 + \mu} \text{ și } -1 + \sqrt{1 + \mu},$$

iar şirul lui Rolle este

$$f(-\infty) < 0,\ f(-1-\sqrt{1+\mu}) = 2\ (1+\mu)(1+\sqrt{1+\mu}) > 0,$$
$$f(-1+\sqrt{1+\mu}) = 2\ (1+\mu)\ (1-\sqrt{1+\mu}) < 0,\ f(+\infty) > 0,$$

adică ecuaţia $f(\lambda) = 0$ are toate trei rădăcinile reale, două fiind negative şi una pozitivă, pentru că $f(0) = -\mu < 0$. Rădăcina pozitivă, singura care corespunde în problema noastră, este cuprinsă în intervalul

$$-1+\sqrt{1+\mu} < \lambda < +\infty.$$

De exemplu, dacă $\mu = \frac{5}{27}$, ecuaţia $f(\lambda) = 0$ devine

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{15\lambda}{27} - \frac{5}{27} = 0 \text{ sau } (3\lambda)^3 + 9(3\lambda)^2 - 5(3\lambda) - 5 = 0,$$

care admite rădăcina pozitivă $3\lambda = 1$, sau $\lambda = 1/3$; celelalte două rădăcini ale ecuaţiei $f(\lambda) = 0$ sînt date de

$$(3\lambda)^2 + 10\ (3\lambda) + 5 = 0, \quad 3\lambda = -5 \pm 2\sqrt{5}$$

şi ambele rădăcini sînt reale şi negative, în conformitate cu teoria generală.

II.20. *Un vas are forma unui con circular drept, cu axa verticală şi vîrful în jos. Raza cercului de bază al conului este R, înălţimea conului este H.*

1. *În acest vas se toarnă o cantitate de apă egală cu V_1. Să se determine înălţimea H_1 pînă la care se ridică apa.*

2. *Se presupune că în vas se află apă pînă la o înălţime H_1 şi se introduce în vas o sferă de rază r, care rămîne complet acoperită de apă.*

Se cere să se afle cu cît s-a ridicat nivelul apei prin introducerea sferei.

Să se determine această creştere în cazul particular cînd vasul are forma corespunzătoare relaţiei $R=H$, iar raza sferei este

$$r = \frac{H_1}{2}.$$

3. *Să se determine, în cazul particular de la punctul 2, care este aria udată de apă.*

4. *Să se determine care este volumul cel mai mic de apă care trebuie să existe în vas, pentru ca sfera să fie complet acoperită de apă, în cazul particular $R=H$.*

5. *Aceeaşi întrebare de la punctul 4, pentru cazul general.*

Soluţie. 1. Conul de apă este asemenea cu conul dat, de unde rezultă proporţionalitatea elementelor omoloage:

$$\frac{R}{R_1}=\frac{H}{H_1},\ R_1=\frac{RH_1}{H},$$

iar din expresia volumului conului de apă deducem

$$V_1=\frac{\pi R_1^2 H_1}{3},\ V_1=\frac{\pi R^2 H_1^3}{3H^2},$$

$$H_1^3=\frac{3H^2V_1}{\pi R^2},\qquad H_1=\sqrt[3]{\frac{3H^2V_1}{\pi R^2}}.$$

2. Dacă însemnăm cu $v=4\pi\frac{r^3}{3}$ volumul sferei şi cu V_2 volumul conului de apă după introducerea sferei, avem $V_2=V_1+v$; formula stabilită la punctul 1 pentru conul de volum V_1 este valabilă şi pentru conul de volum V_2, deci

$$H_2=\sqrt[3]{\frac{3H^2V_2}{\pi R^2}},\quad H_2=\sqrt[3]{\frac{3H^2(V_1+v)}{\pi R^2}}.$$

Creşterea nivelului apei, prin introducerea sferei, este egală cu diferenţa

$$H_2-H_1=\sqrt[3]{\frac{3H^2(V_1+v)}{\pi R^2}}-\sqrt[3]{\frac{3H^2V_1}{\pi R^2}},$$

$$H_2-H_1=\sqrt[3]{\frac{3H^2}{\pi R^2}}\left\{\sqrt[3]{V_1+v}-\sqrt[3]{V_1}\right\}.$$

Dacă $H=R$ şi $r=\frac{H_1}{2}$, deducem

$$V_1=\frac{\pi H_1^3}{3},\quad v=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{\pi H_1^3}{6}=\frac{V_1}{2}.$$

$$H_2^3=\frac{9V_1}{2\pi}=\frac{3H_1^3}{2},\ H_2-H_1=H_1\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}-1\right\},$$

$$H_2-H_1=\sqrt[3]{\frac{3V_1}{\pi}}\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}-1\right\}.$$

3. Aria udată de apă este egală cu aria sferei plus aria laterală a conului de înălțime H_2, adică

$$S_u = 4\pi r^2 + \pi R_2 G_2 = \pi H_1^2 + \pi R_2 G_2,$$

unde G_2 este generatoarea conului de înălțime H_2,

$$G_2^2 = R_2^2 + H_2^2 = 2H_2^2 = 2H_1^2\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$$

pentru că $\frac{R}{R_2} = \frac{H}{H_2}$ și $R = H$, deci $R_2 = H_2$ și $H_2 = H_1\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Deducem

$$G_2 = H_1\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}},\ \pi R_2 G_2 = \pi H_1 H_2\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}},$$

$$S_u = \pi H_1^2 + \pi H_1^2\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \pi H_1^2\left\{1 + \sqrt[6]{\frac{81}{2}}\right\}.$$

4. Fie G generatoarea vasului conic, $G^2 = R^2 + H^2$,

$$G = \sqrt{R^2 + H^2} = H\sqrt{2}.$$

Fie v_1 volumul conului minim de apă și h_1 înălțimea lui, fie v_2 volumul conului de apă, după introducerea sferei, și h_2 înălțimea lui; după formulele stabilite la punctul 2 avem

$$h_2 = \sqrt[3]{\frac{3H^2(v_1 + v)}{\pi R^2}} = \sqrt[3]{\frac{3(v_1 + v)}{\pi}}.$$

Sfera introdusă în vas rămîne tangentă la con; urmează că $h_2 = r + l$, unde l înseamnă distanța centrului sferei la vîrful conului. Triunghiul dreptunghi de ipotenuză l și catetă r este asemenea cu triunghiul dreptunghi de ipotenuză G și catetă R, pentru că au un unghi ascuțit comun, deci

$$\frac{l}{G} = \frac{r}{R},\ l = \frac{rG}{R} = \frac{rH\sqrt{2}}{R} = r\sqrt{2},\ h_2 = r(1 + \sqrt{2}),$$

$$r^3(1 + \sqrt{2})^3 = \frac{3(v_1 + v)}{\pi},\ v_1 = \frac{\pi r^3(3 + 5\sqrt{2})}{3}.$$

5. În cazul general avem

$$G = \sqrt{R^2 + H^2}, \; l = \frac{rG}{R} = \frac{r\sqrt{R^2 + H^2}}{R},$$

$$h_2 = r + l = r\left(1 + \frac{G}{R}\right),$$

$$r^3\left(1 + \frac{G}{R}\right)^3 = 3H^2\frac{v_1 + v}{\pi R^2},$$

$$v_1 = \pi R^2 r^3 \frac{\left(1 + \frac{G}{R}\right)^3}{3H^2} - \frac{4\pi r^3}{3},$$

$$v_1 = \frac{\pi r^3}{3}\left\{\frac{R^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}}\right)^3}{H^2} - 4\right\}.$$

Ca verificare, pentru $R = H$, v_1 se reduce la

$$\frac{\pi r^3}{3}\{(1 + \sqrt{2})^3 - 4\} = \frac{\pi r^3(3 + 5\sqrt{2})}{3},$$

valoare găsită direct la punctul 4.

II.21. 1. *Să se arate că locul geometric al punctelor din spațiu din care se vede un segment de dreaptă AB sub un unghi drept, este sfera având pe AB ca diametru.*

2. *Fiind dat un triunghi ABC, să se deducă că există în spațiu două puncte O_1 și O_2, simetrice față de planul triunghiului ABC, așa fel ca unghiurile AO_nB, BO_nC, CO_nA să fie drepte ($n = 1$ sau 2).*

3. *Să se determine, în funcție de lungimile a, b, c, ale laturilor triunghiului ABC, aria laterală și volumul piramidei cu vîrful în O_n și cu baza ABC.*

4. *Să se demonstreze că dreapta O_1O_2 întîlnește planul triunghiului ABC în ortocentrul acestui triunghi.*

Soluție. 1. Fie P un punct *oarecare* pe sfera de diametru AB; planul PAB taie sfera după un cerc mare, adică un cerc de diametru AB și în acest cerc, $\sphericalangle APB = 90°$, prin urmare *toate* punctele P ale sferei se bucură de această proprietate. Punctele sferei sînt *singurele* puncte care se bucură de această proprietate; într-adevăr, fie Q un punct interior (sau exterior)

sferei; planul QAB taie sfera după un cerc mare şi, în acest cerc, punctul Q este interior (sau exterior) cercului, deci

$$\sphericalangle AQB > 90^\circ \quad (\text{sau} < 90^\circ).$$

2. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB; cercul cu centrul în B' şi diametrul AC, taie cercul cu centrul în C' şi diametrul AB, după coarda AA_1, perpendiculară pe linia centrelor $B'C'$, deci perpendiculară pe BC; rezultă că coarda AA_1 este înălţimea coborîtă din vîrful A pe latura BC.

Rezultă că sfera de diametru AC taie sfera de diametru AB după cercul de diametru AA_1 şi acest cerc este situat într-un plan perpendicular pe linia centrelor $B'C'$, deci, perpendicular pe planul orizontal ABC.

Cercul vertical de diametru AA_1 înţeapă sfera de diametru BC în două puncte O_1 şi O_2; aceste puncte sînt simetrice în raport cu planul ABC pentru că şi cercul şi sfera admit ca plan de simetrie planul ABC.

Punctul O_1 (şi O_2) fiind situat pe sferele de diametre BC, CA, AB, rezultă după proprietatea 1 că fiecare dintre laturile triunghiului este văzută din acest punct sub un unghi drept.

3. Însemnăm cu O unul din punctele O_1 şi O_2; triedrul $OABC$ este tridreptunghi, fie

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z.$$

În triunghiurile dreptunghice BOC, COA, AOB, avem după teorema lui *Pitagora*,

$$y^2 + z^2 = a^2, \quad z^2 + x^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = c^2,$$

de unde rezultă

$$2x^2 = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2y^2 = +a^2 - b^2 + c^2,$$
$$2z^2 = +a^2 + b^2 - c^2.$$

Aria laterală a piramidei $OABC$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor BOC, COA, AOB, adică cu suma

$$\frac{(yz + zx + xy)}{2},$$

iar volumul piramidei, egal cu volumul tetraedrului cu vîrful în C şi baza AOB, este egal cu

$$\frac{xy}{2} \times \frac{z}{3} = \frac{xyz}{6}.$$

Dacă înlocuim pe x, y, z, cu valorile deduse din ecuaţiile de mai sus, obţinem aria laterală şi volumul piramidei $OABC$ în funcţie de laturile a, b, c ale triunghiului ABC.

De exemplu, dacă $a^2 = 41$, $b^2 = 34$, $c^2 = 25$, deducem $x = 3, y = 4$, $z = 5$ şi, dacă unitatea de măsură pentru lungimi este centimetrul,

aria laterală $= 23{,}50$ cm^2, volumul $= 10$ cm^3.

4. Am văzut la punctul 2 că punctele O_1 şi O_2 sînt situate într-un plan vertical, a cărui urmă pe planul orizontal ABC este înălţimea AA_1. Prin permutări circulare deducem că punctele O_1 şi O_2 sînt situate şi în planele verticale, ale căror urme pe planul orizontal ABC sînt înălţimile BB_1 şi CC_1. Urmează că planele verticale care trec prin aceste înălţimi se taie după perpendiculara ridicată în ortocentrul H pe planul ABC, iar punctele O_1 şi O_2, fiind situate pe aceste trei plane verticale, sînt situate pe dreapta comună lor, ceea ce revine a spune că dreapta O_1O_2 înţeapă planul ABC în ortocentrul H.

II.22. *Se dă triunghiul dreptunghi AOB, în care catetele $OA = a$ şi $OB = b$. Se construieşte bisectoarea OH a unghiului drept şi prin OH se duce planul P perpendicular pe planul triunghiului AOB. În planul P se duce prin O o dreaptă OC care să facă cu OH un unghi de 45°.*

1. *Să se afle volumul tetraedrului $OABC$, unde $OC = c$.*
2. *Cum poate fi construit punctul C astfel ca $CA = CB$?*
3. *Punctul C fiind obţinut prin construcţia 2, să se afle volumul tetraedrului $OABC$.*

Soluţie. 1. Însemnăm cu H proiecţia punctului C pe planul triunghiului OAB, planul OHC este planul P. Triunghiul OHC este dreptunghi în H şi isoscel pentru că $\sphericalangle HOC = 45°$, deci

$$HC = OH = OC \cos 45° = c\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Volumul piramidei $COAB$ este egal cu

$$\frac{\text{aria } AOB \times HC}{3} = \frac{\frac{ab}{2} \times \frac{c\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}.$$

2. Fie MH mediatoarea ipotenuzei AB în triunghiul AOB, adică perpendiculara ridicată pe AB în mijlocul său M, şi fie H intersecţia bisectoarei OH cu mediatoarea MH.

În cercul circumscris triunghiului AOB, bisectoarea OH împarte arcul AB în două părți egale; mediatoarea MH împarte și ea arcul AB în două părți egale, deci punctul lor de intersecție H este mijlocul arcului AB.

Locul geometric al punctului C din spațiu, egal depărtat de punctele A și B, este planul MHC dus prin M perpendicular pe segmentul AB. Acest plan, perpendicular pe planul triunghiului OAB, taie planul P sau OHC, de asemenea perpendicular pe planul OAB, după dreapta HC, perpendiculară pe planul OAB, de unde rezultă următoarea construcție a punctului C, în ipoteza $CA = CB$; se construiește cercul circumscris triunghiului AOB și fie H mijlocul arcului AB; se ridică în H perpendiculara HC pe planul AOB și se ia, pe această perpendiculară, punctul C așa fel ca distanțele $HC = OH$.

3. Luăm pe latura OA punctul B' așa fel ca $OB' = OB$, rezultă că în triunghiul isoscel BOB' bisectoarea OH este și mediatoare, deci $HB = HB'$ și prin urmare $CB = CB'$; dar $CA = CB$, deci $CA = CB'$. Fie I mijlocul segmentului AB'; în triunghiul isoscel ACB', mediana IC este și înălțime, adică CI este perpendiculară pe AO. Însă CH este perpendiculară pe planul OAB, rezultă că HI este perpendiculară pe AO. Însă triunghiul dreptunghi OIH este isoscel pentru că $\sphericalangle IOH = 45°$, OH fiind bisectoarea unghiului drept AOB. Rezultă

$$HI = OI = \frac{OA + OB'}{2} = \frac{a + b}{2},$$

$$OH = OI\sqrt{2} = (a + b)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OC = OH\sqrt{2} = a + b \text{ sau } c = a + b.$$

Volumul tetraedrului $OCAB$ se deduce din formula stabilită la 1 în care se înlocuiește c prin $a + b$,

$$\text{volumul } OABC = ab\,(a + b)\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Observație. În triunghiul dreptunghi OIC, avem

$$OC = a + b,\ OI = \frac{a + b}{2},$$

rezultă

$$\sphericalangle IOC = 60°.$$

În general, dacă $\sphericalangle HOC = \alpha$, avem

$$HC = OC \sin \alpha = c \sin \alpha,$$

iar volumul tetraedrului $COAB$ este

$$\frac{abc \sin \alpha}{6}.$$

Punctul H este același pentru toate valorile lui α; dacă se pune condiția $CA = CB$, punctul C este vîrful triunghiului dreptunghi OHC, în care unghiul din O are valoarea α în loc de 45°.

$$OH = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \text{ ca mai sus, iar}$$

$$HC = OH \operatorname{tg} \alpha = (a+b)\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

volumul $OABC = ab\,(a+b)\dfrac{\sqrt{2}}{12} \operatorname{tg} \alpha$.

II.23. *Se dă un cilindru de rotație de rază r și înălțime H și un con de rotație având aceeași înălțime, iar baza un cerc de rază R, concentric cu unul dintre cercurile de bază ale cilindrului.*

1. *Să se determine raportul dintre razele r și R așa fel ca cilindrul și conul să aibă același volum.*

2. *Să se determine raportul dintre r și H, așa fel ca cilindrul și conul să aibă același volum și aceeași arie laterală.*

3. *Să se determine volumul porțiunii de con, care este exterioară cilindrului, în cazul 2.*

Soluție. 1. Volumul cilindrului este $\pi r^2 H$, iar volumul conului, $\dfrac{\pi R^2 H}{3}$, deci

$$\pi r^2 H = \frac{\pi R^2 H}{3}, \quad R = r\sqrt{3}.$$

2. Aria laterală a cilindrului este $2\pi rH$, iar aria laterală a conului πRG, unde generatoarea G este dată de ecuația $G^2 = H^2 + R^2$, deci

$$2\pi rH = \pi R\sqrt{H^2 + R^2}, \quad 4r^2H^2 = R^2(H^2 + R^2)$$

și, dacă înlocuim pe R prin $r\sqrt{3}$,

$$4H^2 = 3(H^2 + 3r^2), \quad H = 3r.$$

3. Porțiunea din con, exterioară cilindrului, reprezintă un trunchi de con găurit cu un cilindru mic; trunchiul de con

are înălțimea h necunoscută, iar cercurile lui de bază au razele egale respectiv cu R și r; cilindrul mic are aceeași înălțime h, iar raza cercului de bază egală cu r.

Un plan, dus prin axa comună de simetrie a cilindrului și conului, taie conul după un triunghi dreptunghi în care catetele sînt egale cu H și R, iar ipotenuza egală cu G; același plan taie porțiunea din con exterioară cilindrului tot după un triunghi dreptunghi, în care catetele sînt egale cu h și $(R - r)$. Aceste două triunghiuri fiind asemenea, au catetele proporționale, adică

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{R - r}$$

și, dacă înlocuim $R = r\sqrt{3}$, $H = 3r$, obținem

$$h = r(3 - \sqrt{3}).$$

Volumul trunchiului de con este egal cu

$$\frac{h\pi(R^2 + Rr + r^2)}{3} = \frac{h\pi(4 + \sqrt{3})r^2}{3}.$$

Volumul cilindrului mic este egal cu $\pi r^2 h$, iar volumul solidului căutat este

$$\frac{h\pi(4 + \sqrt{3})r^2}{3} - \pi r^2 h = \frac{h\pi(1 + \sqrt{3})r^2}{3} =$$

$$= \pi r^3 (3 - \sqrt{3}) \frac{1 + \sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi r^3}{\sqrt{3}}.$$

II. 24. *În cercul de bază al unui con circular drept se înscrie un pătrat $ABCD$, ale cărui vîrfuri se unesc cu vîrful V al conului.*

1. *Să se afle volumul piramidei $VABCD$ știind că suprafața laterală a conului se desfășoară după un semicerc de rază dată R.*

2. *Se consideră sfera cu centrul în V și care trece prin cercul de bază al conului; să se afle, în acest caz, aria calotei sferice mărginite de acest cerc.*

Soluție. 1. Fie r raza cercului de bază și g generatoarea conului; aria laterală a conului este egală cu $\frac{2\pi rg}{2}$ și prin ipoteză această suprafață se desfășoară după un semicerc de rază R, deci $\pi rg = \frac{\pi R^2}{2}$. Însă $g = R$, deci $R = 2r$ și $r = \frac{R}{2}$.

Aria pătratului $ABCD$ este $AB^2 = 2r^2 = \frac{R^2}{2}$; înălțimea H a piramidei este o catetă într-un triunghi dreptunghi în care cealaltă catetă este r, iar ipotenuza $g = R$, deci

$$H^2 = R^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2, \; H = r\sqrt{3}.$$

Volumul piramidei $VABCD$ este egal cu

$$AB^2 \times \frac{H}{3} = 2r^2 \times \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{2r^3}{\sqrt{3}} = \frac{R^3}{4\sqrt{3}}.$$

2. Sfera cu centrul în V și care trece prin cercul de bază al conului are raza egală cu $VA = R$;

Planul $ABCD$ taie această sferă în două calote, ale căror înălțimi sînt egale cu $R \pm H = R\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ariile acestor calote sînt egale cu

$$2\pi R(R \pm H) = \pi R^2(2 \pm \sqrt{3}).$$

II,25. *Se dă un triunghi ABC cu latura $BC = a$ și cu înălțimea corespunzătoare acestei laturi $AD = h$; triunghiul se rotește în jurul laturii BC.*

1. *Să se determine volumul generat de triunghiul ABC.*

2. *Să se determine poziția punctului E pe latura AC astfel ca volumele generate de triunghiurile ABE și BEC să fie egale; să se determine de asemenea punctul F analog pe latura AB.*

3. *Să se determine aria născută prin rotația segmentului EF în jurul lui BC.*

4. *Să se determine în general poziția punctului M pe latura AC, astfel ca volumele născute de triunghiurile ABM și BMC să fie într-un raport dat k; de asemenea punctul analog N pe AB, corespunzător aceluiași raport k.*

5. *Să se determine valoarea raportului k astfel ca aria născută prin rotația segmentului MN să fie maximă.*

Soluție. 1. Să însemnăm prin e, f, m, n proiecțiile punctelor E, F, M, N pe latura BC.

Volumul născut de triunghiul dreptunghi ADB este $\frac{\pi h^2 BD}{3}$, iar volumul născut de triunghiul dreptunghi ADC este $\frac{\pi h^2 DC}{3}$; dacă facem suma, găsim că volumul născut de triunghiul ABC este

$$V = \frac{\pi h^2(BD + DC)}{3} = \frac{\pi a h^2}{3}.$$

2. Volumul născut de triunghiul BEC este, după formula de la 1, $V_1 = \frac{\pi a E e^2}{3}$, iar volumul născut de triunghiul ABE este $V_2 = V - V_1$; prin ipoteză $V_1 = V_2$ sau $V_1 = V - V_1$, $V = 2V_1$ sau

$$\frac{\pi a h^2}{3} = \frac{2\pi a E e^2}{3},\ Ee^2 = \frac{h^2}{2},\ Ee = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Prin simetrie, $Ff = \frac{h}{\sqrt{2}}$, deci latura EF este paralelă cu BC.

3. În triunghiurile asemenea AFE și ABC, scriem că bazele și înălțimile sînt proporționale,

$$\frac{EF}{BC} = \frac{h - Ee}{h},\ EF = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Aria născută de segmentul EF este aria laterală a unui cilindru,

$$S_1 = 2\pi EF \times Ee = \frac{2\pi a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h}{\sqrt{2}} = \pi a h\,(\sqrt{2} - 1).$$

4. Însemnăm $x = Mm$; volumul născut de triunghiul BMC este $V_3 = \frac{\pi a x^2}{3}$, iar volumul născut de triunghiul BAM este $V_4 = \frac{\pi a\,(h^2 - x^2)}{3}$. Condiția $V_4 = kV_3$ devine, după suprimarea factorului comun $\frac{\pi a}{3}$,

$$h^2 - x^2 = kx^2,\ h^2 = x^2(1 + k),\ x = \frac{h}{\sqrt{1 + k}}.$$

Prin simetrie, $Nn = Mm = \frac{h}{\sqrt{1 + k}}$, deci latura MN este paralelă cu BC.

5. În triunghiurile asemenea ANM și ABC, bazele și înălțimile sînt proporționale

$$\frac{MN}{BC} = \frac{h - x}{h},\ MN = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k}}\right).$$

Aria născută de segmentul MN este

$$S(k) = 2\pi Mm \times MN = 2\pi ah \frac{\sqrt{1+k}-1}{1+k}.$$

$$S'(k) = 2\pi ah \frac{2-\sqrt{1+k}}{2(1+k)^2}.$$

Funcția $S(k)$ *este staționară pentru* $2 - \sqrt{1+k} = 0$, $k = 3$; cînd parametrul k crește de la $3 - \varepsilon$ la $3 + \varepsilon$, derivata $S'(k)$ trece de la o valoare pozitivă la una negativă, deci funcția este maximă pentru $k = 3$.

II.26. *Se dă triunghiul ABC, de arie S și laturi $a > b > c$*

1. *Să se calculeze, în funcție de a, b, c, S, volumele V_a, V_b, V_c și ariile S_a, S_b, S_c ale solidelor generate prin rotirea triunghiului respectiv în jurul lui BC, CA, AB.*

2. *Care este cea mai mare dintre ariile S_a, S_b, S_c?*

3. *Care este cel mai mare dintre rapoartele $\frac{V_a}{S_a}$, $\frac{V_b}{S_b}$, $\frac{V_c}{S_c}$?*

Soluție 1. Dacă notăm cu h_a, h_b, h_c înălțimile triunghiului, avem

$$3V_a = \pi h_a^2 a, \quad S_a = \pi(b+c)h_a$$

sau ținînd seama de $2S = ah_a$, deducem

$$3aV_a = 4\pi S^2, \quad aS_a = 2\pi S(b+c)$$

și încă două grupe de egalități deduse din aceasta prin permutări circulare.

2. Din punctul 1 deducem că suprafețele S_a, S_b, S_c sînt proporționale respectiv cu

$$\frac{b+c}{a}, \quad \frac{c+a}{b}, \quad \frac{a+b}{c}$$

și aceste trei rapoarte se mai scriu

$$\frac{a+b+c}{a} - 1 < \frac{a+b+c}{b} - 1 < \frac{a+b+c}{c} - 1$$

pentru că $a > b > c$, deci $S_a < S_b < S_c$, adică S_c este cea mai mare dintre cele trei arii.

3. Din punctul 1 deducem că rapoartele $\frac{V_a}{S_a}, \frac{V_b}{S_b}, \frac{V_c}{S_c}$ sînt respectiv proporționale cu

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}.$$

Dar numitorii se mai scriu

$$(a+b+c)-a<(a+b+c)-b<(a+b+c)-c$$

pentru că $a>b>c$, deci

$$\frac{1}{b+c}>\frac{1}{c+a}>\frac{1}{a+b},$$

adică

$$\frac{V_a}{S_a}>\frac{V_b}{S_b}>\frac{V_c}{S_c},$$

deci $\frac{V_a}{S_a}$ este cel mai mare dintre cele trei rapoarte.

II.27. *Se consideră un tetraedru $ABCD$ avînd muchiile, exprimate în metri, egale cu*

$$AB=25,\ AC=56,\ AD=16,\ BC=63,\ BD=33,$$
$$CD=60.$$

1. *Să se calculeze segmentele determinate pe CD de înălțimea unghiului A în triunghiul ACD și segmentele determinate pe CD de înălțimea unghiului B în triunghiul BCD. Să se deducă că aceste înălțimi se întîlnesc în același punct pe CD.*

2. *Să se deducă de la 1 că direcțiile muchiilor AB și CD fac în spațiu un unghi drept. Să se arate, în același fel, același lucru, pentru direcțiile (AC, BD) și (AD, BC).*

3. *Să se calculeze aria totală a tetraedrului.*

Soluție. 1. Să notăm pentru ușurință:

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,\ DA=\alpha,\ DB=\beta,\ DC=\gamma;$$
$$S_a=\text{aria } BCD,\ S_b=\text{aria } CDA,\ S_c=\text{aria } DAB,$$
$$S_d=\text{aria } ABC;$$

p_a, p_b, p_c, p_d, semiperimetrele respective ale triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC;

A', B' proiecțiile lui A și B pe CD; A'', C'' proiecțiile lui A și C pe BD; A''' D''' proiecțiile lui A și D pe BC.

Pentru calcularea segmentelor $A'C$, $A'D$ putem folosi mai multe metode și anume:

a) Teorema lui Pitagora generalizată ne dă în triunghiul ACD:

$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma \times A'D,\ \alpha^2 = b^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot A'C;$$

$$A'D = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - b^2}{2\gamma},\ A'C = \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + b^2}{2\gamma}. \qquad (1)$$

b) Triunghiurile dreptunghice $AA'C$, $AA'D$ ne dau

$$A'C^2 = b^2 - AA'^2,\ A'D^2 = \alpha^2 - AA'^2;$$

iar prin eliminarea lui AA'

$$A'D^2 - A'C^2 = \alpha^2 - b^2 \text{ sau } (A'D + A'C)(A'D - A'C) =$$

$$= \alpha^2 - b^2,\ A'D + A'C = \gamma,\ A'D - A'C = \frac{\alpha^2 - b^2}{\gamma}$$

și, făcînd semisuma și semidiferența acestor două ecuații, obținem pentru $A'D$ și $A'C$ valorile (1).

c) Triunghiurile dreptunghice $AA'D$ și $AA'C$ dau

$$A'D^2 = \alpha^2 - AA'^2,\ A'C^2 = b^2 - AA'^2$$

și, cum AA' este înălțime în triunghiul ACD,

$$\gamma \times AA' = 2S_b.$$

Aria S_b se calculează în funcție de laturile α, b, γ cu formula

$$16\,S_b^2 = (-\alpha^4 - b^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2 b^2 + 2b^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2),$$

și, făcînd înlocuirile, obținem pentru $A'D$ și $A'C$ valorile (1).

Pentru calculul ariilor, utilizăm formula

$$S_d = \sqrt{p_d(p_d - a)(p_d - b)(p_d - c)}.$$

$$2p_a = a + \beta + \gamma = 63 + 33 + 60 = 156,$$
$$p_a - a = 78 - 63 = 15,\ p_a - \beta = 78 - 33 = 45,$$
$$p_a - \gamma = 78 - 60 = 18;$$

$$2p_b = \alpha + b + \gamma = 16 + 56 + 60 = 132,$$
$$p_b - \alpha = 66 - 16 = 50,\ p_b - b = 66 - 56 = 10,$$
$$p_b - \gamma = 66 - 60 = 6;$$

$$2p_c = \alpha + \beta + c = 16 + 33 + 25 = 74,$$
$$p_c - \alpha = 37 - 16 = 21,\ p_c - \beta = 37 - 33 = 4,$$
$$p_c - c = 37 - 25 = 12;$$

$$2p_d = a + b + c = 63 + 56 + 25 = 144,$$
$$p_d - a = 72 - 63 = 9,\ p_d - b = 72 - 56 = 16,$$
$$p_d - c = 72 - 25 = 47.$$

$$S_a = \sqrt{78 \cdot 15 \cdot 45 \cdot 18} = 270\sqrt{13}\ \text{m}^2,$$
$$S_b = \sqrt{66 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 6} = 60\sqrt{55}\ \text{m}^2,$$
$$S_c = \sqrt{37 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 12} = 12\sqrt{259}\ \text{m}^2,$$
$$S_d = \sqrt{72 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 47} = 72\sqrt{94}\ \text{m}^2.$$

$$AA'^2 = \left(\frac{2S_b}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 60\sqrt{55}}{60}\right)^2 = 220,$$

$$AA''^2 = \left(\frac{2S_c}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 12\sqrt{259}}{33}\right)^2 = \frac{64 \times 259}{121},$$

$$AA'''^2 = \left(\frac{2S_d}{a}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 72\sqrt{94}}{63}\right)^2 = \frac{256 \times 94}{49},$$

$$BB'^2 = \left(\frac{2S_a}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 270\sqrt{13}}{60}\right)^2 = 81 \times 13,$$

$$CC''^2 = \left(\frac{2S_a}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 270\sqrt{13}}{33}\right)^2 = \frac{32\,400 \times 13}{121},$$

$$DD'''^2 = \left(\frac{2S_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 270\sqrt{13}}{63}\right)^2 = \frac{3600 \times 13}{49}.$$

$$A'D^2 = \alpha^2 - AA'^2 = 256 - 220 = 36,\ A'D = 6\ \text{m};$$
$$B'D^2 = \beta^2 - BB'^2 = 1089 - 1053 = 36,\ B'D = 6\ \text{m};$$
$$A''B^2 = c^2 - AA''^2 = 625 - \frac{16576}{121},\ A''B = \frac{243}{11}\ \text{m};$$
$$C''B^2 = a^2 - CC''^2 = 3969 - \frac{32400 \times 13}{121},\ C''B = \frac{243}{11}\ \text{m};$$
$$A'''C^2 = b^2 - AA'''^2 = 3136 - \frac{256 \times 94}{49},\ A'''C = \frac{360}{7}\ \text{m};$$
$$D'''C^2 = \gamma^2 - DD'''^2 = 3600 - \frac{3600 \times 13}{49},\ D'''C = \frac{360}{7}\ \text{m}.$$

Segmentele rămase de calculat se deduc din formulele

$$A'C = \gamma - A'D;\ B'C = \gamma - B'D;\ A''D = \beta - A''B;$$
$$C''D = \beta - C''B;\ A'''B = a - A'''C;\ D'''B = a - D'''C.$$

Valorile numerice găsite pentru lungimile segmentelor sînt:

$$A'D = B'D = 6\text{ m};\ A'C = B'C = 54\text{ m};$$

$$A''B = C''B = \frac{243}{11}\text{ m};\ A''D = C''D = \frac{120}{11}\text{ m};$$

$$A'''C = D'''C = \frac{360}{7}\text{ m};\ A'''B = D'''B = \frac{81}{7}\text{ m}.$$

Aceste formule arată că $A' \equiv B'$; $A'' \equiv C''$; $A''' \equiv D'''$ prin urmare înălțimile AA' și BB'; AA'' și CC''; AA''' și DD''' sînt concurente două cîte două în punctele A', A'', A''' situate respectiv pe CD, DB, BC.

2. Trebuie să arătăm că AB este perpendiculară pe CD; cum $A' \equiv B'$, înălțimile AA' și BA' fiind prin definiția lor perpendiculare pe CD, avem CD perpendiculară pe AA'; CD perpendiculară pe BA', deci CD perpendiculară pe planul $AA'B$, deci perpendiculară pe orice dreaptă din planul $AA'B$, în particular pe dreapta AB; am demonstrat astfel că muchiile CD și AB sînt perpendiculare.

Se demonstrează la fel că muchiile BD și AC sînt perpendiculare și muchiile BC și AD sînt perpendiculare.

3. Aria totală S a tetraedrului este egală cu suma ariilor celor patru triunghiuri care-l mărginesc; calculînd rădăcinile pătrate cu două zecimale exacte găsim

$$S = S_a + S_b + S_c + S_d = 270\sqrt{13} + 60\sqrt{55} + 12\sqrt{259} +$$
$$+ 72\sqrt{94} = 270 \times 3{,}60 + 60 \times 7{,}41 + 12 \times 16{,}09 + 72 \times$$
$$\times 9{,}69 = 972 + 444{,}60 + 193{,}08 + 679{,}68;\ S = 2307{,}36\text{ m}^2.$$

Considerații geometrice. Dacă nu s-ar fi cerut în mod special să se calculeze segmentele $A'C$, $A'D$, $B'C$, $B'D$ și analogele, s-ar fi putut demonstra cu mai puține calcule că înălțimile fețelor sînt două cîte două concurente și că muchiile sînt două cîte două perpendiculare. Într-adevăr, la punctul 1 am obținut din teorema lui Pitagora generalizată

$$A'D = \frac{\gamma^2 + a^2 - b^2}{2\gamma}.$$

Analog se obține din triunghiul BCD,

$$B'D = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - a^2}{2\gamma}.$$

Dacă înălțimile se întîlnesc pe CD, avem $A' = B'$, deci $A'D \equiv B'D$ sau

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2. \qquad (2)$$

Aceasta este condiția *necesară* ca AA' și BB' să se întîlnească pe CD sau $A' \equiv B'$.

Această condiție este și *suficientă*; într-adevăr, am văzut la punctul 1 b) că

$$A'D - A'C = \frac{\alpha^2 - b^2}{\gamma}.$$

Analog se deduce din triunghiurile $BB'D$ și $BB'C$,

$$B'D - B'C = \frac{\beta^2 - a^2}{\gamma},$$

iar prin scăderea membru cu membru a ultimelor două egalități,

$$A'D + B'C - A'C - B'D = \frac{(a^2 + \alpha^2) - (b^2 + \beta^2)}{\gamma}.$$

Însă, prin ipoteză, $a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2$, deci

$$A'D + B'C - A'C - B'D = 0.$$

Adunăm la ambii membri $2(A'C + B'D)$,

$$A'D + A'C + B'C + B'D = 2(A'C + B'D).$$

Dar $A'C + A'D = B'C + B'D = \gamma$, deci simplificînd cu 2 în ultima egalitate, obținem $\gamma = A'C + B'D$; dar $\gamma = A'C + A'D$, deci $A'D = B'D$, de unde rezultă $A' \equiv B'$.

Am demonstrat deci că (2) este condiția *necesară și suficientă* ca înălțimile AA' și BB' să se întîlnească pe CD, de unde rezultă, conform celor arătate la punctul 2, că AB și CD sînt perpendiculare.

Se demonstrează la fel că $a^2 + d^2 = c^2 + \gamma^2$ este condiția necesară și suficientă ca înălțimile AA' și CC' să se întîlnească pe BD, iar $b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2$ este condiția necesară și suficientă ca înălțimile AA''' și DD''' să se întîlnească pe BC.

În enunțul problemei,

$$a^2 + \alpha^2 = 63^2 + 16^2 = 4225;\ b^2 + \beta^2 = 56^2 + 33^2 = 4225;$$

$$c^2 + \gamma^2 = 25^2 + 60^2 = 4225,$$

deci

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2, \qquad (3)$$

de unde rezultă $A' \equiv B'$; $A'' \equiv C''$; $A''' \equiv D'''$.

Observăm că una dintre aceste trei coincidențe este o consecință a celorlalte două, căci de exemplu din

$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2$ și $a^2 + \alpha^2 = c^2 + \gamma^2$, rezultă $b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2$.

Dubla egalitate (3) caracterizează un *tetraedru ortocentric* (cu laturile opuse perpendiculare în spațiu două cîte două) și se exprimă astfel: *condiția necesară și suficientă ca un tetraedru să fie ortocentric, este ca suma pătratelor muchiilor opuse să fie aceeași* (se demonstrează că înălțimile acestui tetraedru sînt concurente într-un punct numit *ortocentrul* tetraedrului și aceasta este altă proprietate *caracteristică* a tetraedrului ortocentric).

Am demonstrat mai sus că, dacă într-un tetraedru două perechi de muchii opuse fac în spațiu unghiuri drepte, atunci a treia pereche de muchii face de asemenea un unghi drept.

În sfîrșit, condiția (2) se mai scrie $a^2 - \beta^2 = b^2 - \alpha^2$ sau

$$BC^2 - BD^2 = AC^2 - AD^2 = k^2.$$

Însă locul geometric al punctului B care satisface condiția $BC^2 - BD^2 = k^2$ este un plan perpendicular pe CD; la fel, punctul A se găsește în același plan, deci dreapta AB se găsește într-un plan perpendicular pe CD, ceea ce revine a spune că dreptele AB și CD sînt perpendiculare.

Considerații aritmetice. Tetraedrul dat este așa fel ales încît lungimile muchiilor lui sînt egale cu *numerele întregi* 63 și 16, 60 și 25, 56 și 33, care satisfac condițiile

$$63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = 56^2 + 33^2 = 65^2 = 4225,$$

iar primele două egalități exprimă că tetraedrul este *ortocentric*. Se pune problema dacă mai există și alte tetraedre ortocentrice ale căror muchii să fie exprimate în numere întregi. Numim *triunghi aritmetic*, triunghiul dreptunghi ale cărui laturi sînt egale cu numere întregi; de exemplu triunghiul 3, 4, 5 este aritmetic pentru că $3^2 + 4^2 = 5^2$. Egalitățile de mai sus exprimă că există trei unghiuri aritmetice ale căror ipotenuze sînt egale cu 65 și anume triunghiurile (16, 63, 65), (25, 60, 65), (33, 56, 65).

Numim prin extensiune *tetraedru aritmetic*, tetraedrul ortocentric ale cărumuchii sînt egale cu numere întregi și problema determinării tetraedrelor aritmetice se reduce la determinarea triunghiurilor aritmetice cu ipotenuza dată, cu condiția ca această problemă să admită cel puțin trei soluții.

Dacă x, y, z sînt laturile triunghiului aritmetic $x^2 + y^2 = z^2$ și dacă ipotenuza z este un număr prim de forma $4k + 1$, se știe că z se descompune într-o sumă de două pătrate, $z = a^2 + b^2$ și această descompunere este *unică*. Dacă punem apoi

$$x = 2ab,\ y = b^2 - a^2,\ z = a^2 + b^2$$

obținem un triunghi aritmetic, pentru că

$$(2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

De exemplu, $z = 17 = 1^2 + 4^2$, $a = 1$, $b = 4$, $x = 8$, $y = 15$ și avem triunghiul aritmetic (8, 15, 17).

Dar acest caz nu convine problemei tetraedrului aritmetic pentru că descompunerea lui z în două pătrate este *posibilă*, însă soluția este unică, pe cînd pentru problema noastră trebuie să avem cel puțin *trei soluții*.

Dacă z admite numai un factor prim de forma $4k + 3$ (de exemplu 35), descompunerea lui z în două pătrate este imposibilă.

Dacă z este un produs de numere prime de forma $4k + 1$, descompunerea lui z în două pătrate este posibilă și problema admite mai multe soluții.

Dacă z este divizibil printr-un număr de forma $(4k + 3)^2$, se poate găsi o descompunere a lui z în două pătrate, însă numerele x, y, z corespunzătoare nu mai sînt prime între ele, de exemplu

$$z = 45 = 3^2 + 6^2,\ a = 3,\ b = 6,\ x = 2ab = 36,\ y = b^2 - a^2 = 27,$$

iar triunghiul aritmetic (27, 36, 45) rezultă din triunghiul aritmetic primitiv (3, 4, 5) prin amplificarea laturilor cu 9.

În rezumat, vom lua pentru z un produs de numere prime de forma $4k + 1$; cele mai mici numere prime de această formă sînt 5, 13, 17, 29 și cea mai mică valoare a lui z este $5 \times 13 = 65$, care se descompune astfel:

$$z = 65 = 1^2 + 8^2,\ a = 1,\ b = 8,\ x = 2ab = 16,\ y = b^2 - a^2 = 63;$$

$$z = 65 = 4^2 + 7^2,\ a = 4,\ b = 7,\ x = 2ab = 56,\ y = b^2 - a^2 = 33.$$

Putem avea însă un triunghi aritmetic (x, y, z) fără ca a și b să fie numere raționale, de exemplu

$$z = 65 = 20 + 45,\ a = 2\sqrt{5},\ b = 3\sqrt{5},\ x = 2ab = 60,\ y = b^2 - a^2 = 25.$$

$$z = 65 = 13 + 52,\ a = \sqrt{13},\ b = 2\sqrt{13},\ x = 2ab = 52,\ y = b^2 - a^2 = 39.$$

Tetraedrul cu perechile de muchii (1, 8), (4, 7), $(2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ este ortogonal, dar nu este aritmetic; în schimb, tetraedrul (16, 63), (56, 33), (60, 25) este aritmetic.

Dacă luăm un alt exemplu, $z = 5 \times 221 = 1105$, avem descompunerile

$$z = 1105 = 4^2 + 33^2,\ a = 4,\ b = 33,\ x = 264,\ y = 1073;$$
$$z = 1105 = 9^2 + 32^2,\ a = 9,\ b = 32,\ x = 576,\ y = 943;$$
$$z = 1105 = 12^2 + 31^2,\ a = 12,\ b = 31,\ x = 744;\ y = 817;$$
$$z = 1105 = 23^2 + 24^2,\ a = 23,\ b = 24,\ x = 1104,\ y = 47,$$

de unde rezultă 8 tetraedre aritmetice, din care 4 obținute luînd trei perechi de muchii (a, b), de exemplu tetraedrul (4, 33), (9, 32), (12, 31) și alte patru obținute luînd trei perechi de muchii (x, y), de exemplu (264, 1073), (576, 943), (744, 817).

Și în acest exemplu putem avea un triunghi aritmetic (x, y, z) fără ca a și b să fie numere raționale, de exemplu $a = \sqrt{221}$, $b = 2\sqrt{221}$ și așa mai departe.

II.28. *Trei sfere concentrice (A), (B), (C) au razele $a < b < c$; două conuri au vîrfurile într-un același punct O situat pe sfera (C) și sînt circumscrise sferelor (A) și (B) de-a lungul a două cercuri (α) și (β).*

Să se calculeze volumul și aria totală a trunchiului de con ale cărui baze sînt cercurile (α) și (β), în cazul particular

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

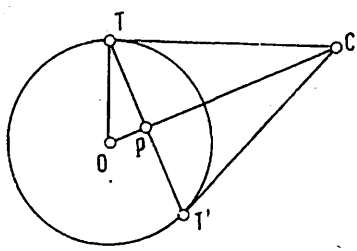


Fig. 30

Soluție. Fie O centrul comun al sferelor; un plan dus prin dreapta OC taie sfera (A) după cercul cu centrul în O și raza a, iar conul circumscris sferei (A), după triunghiul isoscel TCT', în care T și T' sînt punctele de tangență ale tangentelor duse din C la cercul (α); fie P mijlocul lui TT' (fig. 30).

Triunghiul OTC este dreptunghi și

$$OT = a,\ PT = \alpha,\ OC = c,\ TC = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Dacă scriem în două moduri aria triunghiului OTC, avem

$$PT \times OC = OT \times TC,\ \text{deci}\ \alpha = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c}.$$

Cateta CT este medie proporțională între ipotenuza OC și proiecția ei CP pe ipotenuză, de unde scoatem dacă notăm $I_1 = CP$,

$$I_1 = \frac{c^2 - a^2}{c}.$$

Dacă permutăm pe a cu b, avem elementele celui de al doilea con; în rezumat, razele bazelor celor două conuri sînt

$$\alpha = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c}, \qquad \beta = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{c},$$

iar înălțimile sînt

$$I_1 = \frac{c^2 - a^2}{c}, \qquad I_2 = \frac{c^2 - b^2}{c}.$$

Urmează că trunchiul de con care are ca baze cercurile (α) și (β) are înălțimea

$$H = I_1 - I_2 = \frac{b^2 - a^2}{c}.$$

Generatoarea G a trunchiului se calculează cu formula

$$G^2 = H^2 + (\beta - \alpha)^2.$$

Avem deci toate elementele pentru a calcula volumul și aria totală.

În cazul particular $a^2 + b^2 = c^2$, avem $\alpha = \beta = \frac{ab}{c}$, adică trunchiul de con se reduce la un cilindru și volumul lui este

$$V = \frac{\pi a^2 b^2 (b^2 - a^2)}{c^3},$$

iar aria lui totală

$$S = \frac{2\pi a^2 b^2}{c^2} + \frac{2\pi ab (b^2 - a^2)}{c^2}.$$

II.29. *Se dă un triedru tridreptunghi $Oxyz$. Pe Ox se ia într-un sens $OA = a$ și în celălalt sens $OC' = c$, pe Oz se ia într-un sens $OC = c$ și în celălalt sens $OA' = a$; pe Oy se ia $OB = b$* (fig. 31). *Se presupune*

$$b^2 = ac.$$

1. *Să se calculeze volumul V_1 al piramidei triunghiulare $OABC$.*

2. *Să se calculeze volumul V_2 al piramidei cu vîrful în B și cu baza trapezul $AA'C'C$.*

3. *Să se calculeze volumul V_a al conului care are vîrful în A și baza cercul circumscris triunghiului BOC.*

Să se calculeze volumele V_b și V_c ale celorlalte două conuri analoage și să se determine care este cel mai mare.

4. *Să se arate că un plan oarecare, care trece prin OB, taie conul cu vîrful în B și cu baza cercul circumscris trapezului $AA'C'C$ după un unghi drept.*

Soluție. 1. Piramida $OABC$ are muchiile OA, OB, OC perpendiculare două cîte două; volumul ei V_1 este egal cu produsul dintre aria triunghiului ABC și înălțimea corespunzătoare coborîtă din vîrful O pe baza ABC, totul împărțit la trei. Însă putem calcula mai ușor volumul V_1 considerînd că baza piramidei este triunghiul dreptunghi AOB, de arie $\frac{ab}{2}$, înălțimea corespunzătoare fiind $OC = c$, deci

$$V_1 = \frac{abc}{6}.$$

2. Trapezul $AA'C'C$ este isoscel, $AC = A'C'$, iar diagonalele lui perpendiculare; din triunghiurile dreptunghice isoscele AOA' și COC', scoatem pentru bazele și înălțimea trapezului

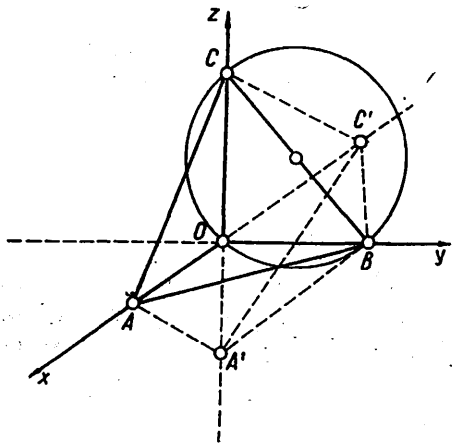


Fig. 31

$$AA' = a\sqrt{2},\quad CC' = c\sqrt{2},$$

$$I = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{c\sqrt{2}}{2},$$

aria trapezului este deci

$$\frac{(a+c)^2}{2}.$$

Înălțimea piramidei este $OB = b$, volumul ei este deci

$$V_2 = \frac{(a+c)^2 b}{6}.$$

3. Triunghiul BOC fiind dreptunghi, cercul circumscris lui are ca diametru $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$, aria cercului circumscris este deci egală cu $\frac{\pi(b^2+c^2)}{4}$.

Înălțimea conului fiind $OA = a$, volumul lui este

$$V_a = \frac{\pi (b^2 + c^2)\, a}{12}.$$

Prin permutări circulare, deducem pentru celelalte două conuri

$$V_b = \frac{\pi (c^2 + a^2)\, b}{12}$$

$$V_c = \frac{\pi (a^2 + b^2)\, c}{12}.$$

Din ipoteza $b^2 = ac$, voim să arătăm că

$$V_a = V_c < V_b$$

adică cel mai mare volum este V_b. Într-adevăr $V_a = V_c$, adică $a(b^2 + c^2) = c(a^2 + b^2)$ pentru că $a(ac + c^2) = c(a^2 + ac)$.

Mai rămîne să verificăm că $V_a < V_b$, adică

$a(b^2 + c^2) < b(c^2 + a^2)$ sau $ac(a + c) < b(c^2 + a^2)$.

Ridicăm la pătrat și simplificăm cu $ac = b^2$,

$ac(a + c)^2 < (a^2 + c^2)^2$ sau $ac(a^2 + c^2) < a^4 + c^4$,

$0 < c^3(c - a) + a^3(a - c)$ sau $(c - a)^2(c^2 + ac + a^2) > 0$,

inegalitate evidentă.

4. Ducem în planul xOz o dreaptă care trece prin punctul o; ea taie cercul circumscris trapezului $AA'C'C$ în punctele P și Q. În acest cerc avem, oricare ar fi coarda POQ,

$$OP \times OQ = OA \times OC' = ac = b^2.$$

Planul PBQ taie conul cu vîrful în B și cu baza cercul circumscris trapezului $AA'C'C$ după generatoarele BP și BQ; se cere să arătăm că aceste două generatoare fac un unghi drept.

Într-adevăr, în triunghiul PBQ, OB este înălțime și pentru că $OB = b$, avem după relația de mai sus,

$$OB^2 = OP \times OQ$$

care spune că înălțimea OB este media geometrică a proiecțiilor celorlalte două laturi PB și QB pe latura PQ, proprietate caracteristică a triunghiului dreptunghi PBQ.

II.30. *Pe două semidrepte Ox și Oy făcînd un unghi $xOy = 120°$, se iau două lungimi egale $OA = OB = a$, iar pe perpendiculara în O pe planul xOy se ia o lungime OC egală cu diagonala pătratului de latură a. Fie M mijlocul segmentului AB* (fig. 32).

1. *Să se demonstreze că* $OM = \frac{a}{2}$.

2. *Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.*

3. *Să se calculeze în funcție de a, aria totală și volumul piramidei $OABC$.*

4. *Presupunînd vîrful în C și baza OAB, să se construiască grafic desfășurata suprafeței laterale a piramidei $COAB$ pentru $a = 40$ cm, piramida fiind tăiată după muchia laterală CO.*

Soluție. 1. În triunghiul isoscel AOB, mediana OM este bisectoare și înălțime, urmează că în triunghiul dreptunghi OMA, unghiurile ascuțite sînt egale respectiv cu 60° și 30°; deci cateta OM este egală cu jumătatea ipotenuzei OA, adică $\frac{a}{2}$.

2. În triunghiul dreptunghi OMA,

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4},$$

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AB = 2AM = a\sqrt{3}.$$

În triunghiul dreptunghi AOC,

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2, \; AC = a\sqrt{3}.$$

Triunghiurile dreptunghice AOC și BOC sînt egale, deci $AC = BC$. În total am găsit

$$AB = BC = CA = a\sqrt{3},$$

deci triunghiul ABC este echilateral.

3. Triunghiul isoscel AOB are baza $AB = a\sqrt{3}$ și înălțimea $OM = \frac{a}{2}$, suprafața lui este deci $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Triunghiurile dreptunghice AOC și BOC sînt egale, aria fiecăruia este

$$\frac{OA \times OC}{2} = a \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Triunghiul ABC este echilateral, avînd laturile egale cu $a\sqrt{3}$; aria lui este

$$\frac{\sqrt{3}\,(a\sqrt{3})^2}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pentru verificarea calculului, să arătăm că aria triunghiului OAB, proiecţia pe planul xOy a triunghiului ACB, este egală cu aria triunghiului ACB înmulţită cu cosinusul unghiului diedru α format de cele două plane. Unghiul α este unghiul OMC în triunghiul dreptunghi MOC, pentru că medianele OM şi CM în triunghiurile isoscele AOB şi ACB sînt şi înălţimi. Însă în triunghiul dreptunghi

MOC, catetele $OM = \frac{a}{2}$ şi $OC = a\sqrt{2}$; avem $OC = OM \operatorname{tg} \alpha$,

deci

$$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3},$$

$$\text{aria } \Delta AOB = \cos \alpha \times \text{aria } \Delta ACB = \frac{1}{3} \times \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Aria totală a piramidei este egală cu suma ariilor celor patru triunghiuri care mărginesc piramida, deci

$$S = a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Volumul V al piramidei este egal cu $\frac{1}{3}$ înmulţit cu aria triunghiului de bază AOB şi înmulţit cu înălţimea $OC = a\sqrt{2}$,

$$V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

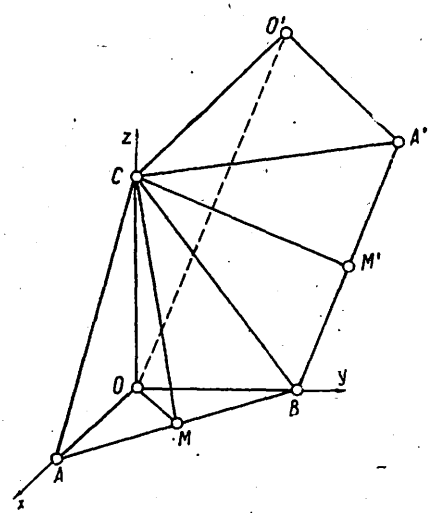


Fig. 32

4. Dacă tăiem suprafaţa laterală a piramidei după muchia OC şi desfăşurăm această suprafaţă pe planul yOz, obţinem figura următoare: triunghiul BOC rămîne neschimbat, triunghiul echilateral ACB se roteşte în jurul muchiei BC pînă vine în planul yOz în poziţia BCA'; vîrful A' se construieşte deci ca al treilea vîrf, situat în primul cadran al planului yOz, al triunghiului echilateral construit pe baza BC.

În desfășurarea pe planul yOz, triunghiul AOC vine în poziția $A'O'C$, pentru care cunoaștem vîrfurile C și A' determinate mai înainte, iar O' este simetricul lui O în raport cu mediana OM' a triunghiului echilateral BCA'. Într-adevăr, în spațiu planele AOC și BOC sînt simetrice în raport cu planul MOC, deci în desfășurarea suprafeței laterale pe planul yOz triunghiurile desfășurate COB și $CO'A'$ vor fi simetrice în raport cu mediana OM'.

II.31. *Se consideră paralelipipedul dreptunghi cu bazele $ABCD$ și $EFGH$ pătrate, înălțimea fiind dublul laturii pătratului. Fie A' și C' mijloacele muchiilor laterale opuse AE și CG. Să se arate:*

1. *Punctele D, A', F, C' sînt în același plan.*
2. *Figura $DA'FC'$ este un romb.*
3. *Unghiul $DA'F$ este de* 120°.
4. *Să se găsească suprafața rombului în funcție de latura a a pătratului.*
5. *Să se determine poziția piciorului perpendicularei dusă din C pe planul rombului.*
6. *Să se afle distanța de la punctul C la acel plan* (fig. 33).

Soluție. 1. Fie B' mijlocul muchiei BF, triunghiurile $A'B'F$ și DCC' sînt dreptunghice isoscele, situate în plane paralele, cu catetele egale cu a și respectiv paralele; rezultă că ipotenuzele $A'F$ și DC' sînt paralele și egale cu $a\sqrt{2}$ deci figura $DA'FC'$ este un paralelogram, ceea ce revine a spune că vîrfurile lui sînt situate în același plan.

2. Din triunghiurile dreptunghice isoscele DAA' și $C'GF$, cu catetele egale cu a, rezultă că ipotenuzele $A'D$ și $C'F$ sînt egale cu $a\sqrt{2}$. Paralelogramul $DA'FC'$, avînd laturile egale cu $a\sqrt{2}$, este un romb.

3. Triunghiul dreptunghi $A'B'C'$ este isoscel cu catetele egale cu a, ipotenuza $A'C'$ este deci egală cu $a\sqrt{2}$. Triunghiul $A'DC'$ are laturile egale cu $a\sqrt{2}$, deci este echilateral, unghiul din D este egal cu 60°, iar în rombul $DA'FC'$, unghiul din A', fiind suplimentar unghiului din D, este egal cu 120°.

4. Aria rombului $DA'FC'$ este egală cu de două ori aria triunghiului echilateral $A'DC'$, a cărui latură este $a\sqrt{2}$, adică:

$$\frac{2\,(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

5. În planul vertical $ABEF$, dreapta FA' prelungită înţeapă planul orizontal $ABCD$ în punctul A'' situat pe prelungirea lui BA aşa fel că $AA'' = a$, pentru că triunghiurile dreptunghice $A'AA''$ şi $FB'A'$ sînt egale.

La fel, în planul vertical $BCFG$, dreapta FC' prelungită înţeapă planul orizontal $ABCD$ în punctul C'' situat pe prelungirea lui BC, aşa fel că $CC'' = a$.

Planul rombului taie planul orizontal după dreapta $A''C''$; însă vîrful este situat în ambele plane, deci se găseşte pe dreapta

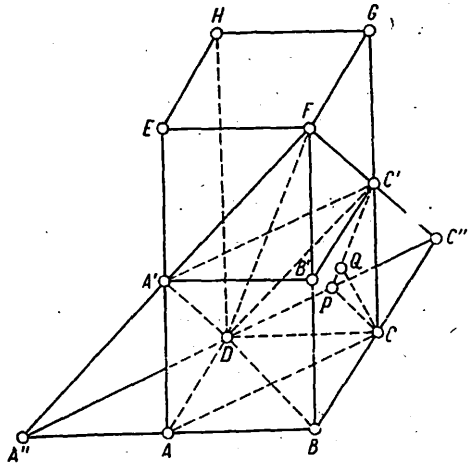


Fig. 33

lor de intersecţie $A''C''$; triunghiul $A''BC''$, situat în planul orizontal, este dreptunghi şi isoscel, pentru că $BA'' = BC'' = 2a$; în acest triunghi dreapta AC, unind mijloacele laturilor egale este paralelă cu baza $A''C''$; însă în pătratul $ABCD$, diagonalele sînt perpendiculare, deci BD perpendicular pe AC, este perpendicular şi pe $A''C''$, adică BD este înălţime, deci şi mediană, în triunghiul dreptunghi isoscel $A''BC''$.

În rombul $DA'FC'$, diagonalele sînt perpendiculare, însă diagonala $A'C'$ este paralelă cu planul orizontal, deci diagonala DF este dreapta de cea mai mare pantă, în particular FD este perpendiculară pe $A''C''$.

Fie P mijlocul lui DC''; în triunghiul dreptunghi BDC'', dreapta CP uneşte mijloacele a două laturi, deci este paralelă cu a treia, adică CP este perpendiculară pe DC''.

În triunghiul dreptunghi FDC'', dreapta $C'P$ unește mijloacele a două laturi, deci este paralelă cu a treia, adică $C'P$ este perpendiculară pe DC''.

Planul CPC' este perpendicular pe dreapta de intersecție DC'' a planului rombului cu planul orizontal.

Fie Q piciorul înălțimii coborîte din C în triunghiul PCC'; Q este piciorul perpendicularei coborîte din C pe planul rombului.

6. Distanța de la punctul C la planul rombului este egală cu CQ; în triunghiul dreptunghi PCC', exprimăm în două feluri aria lui și avem

$$CP \cdot CC' = CQ \cdot PC',$$

în care

$$CC' = a, \quad CP = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad PC' = \frac{DF}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Deducem

$$CQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

II.32. 1. *Dacă A, B, C sînt mijloacele laturilor triunghiului echilateral $A_1 B_1 C_1$, să se arate că locul geometric al punctului P din spațiu, care satisface condiția*

$$PA^2 = PB^2 + PC^2,$$

este sfera cu centrul în vîrful A_1 și raza A_1B.

2. *Generalizare pentru un triunghi oarecare $A_1 B_1 C_1$.*

Soluție. 1. Pentru rezolvare, a se vedea problema I. 33 : formulele stabilite în ipoteza că punctul P este situat în planul triunghiului ABC rămîn valabile și în cazul în care punctul P este situat în spațiu.

Cercurile R_a, R_b, R_c din cazul planului vor fi înlocuite cu sferele S_a, S_b, S_c în cazul spațiului.

De exemplu, o sferă S_a este locul geometric al punctului P din spațiu cu ale cărui distanțe PA, PB, PC la vîrfurile unui triunghi oarecare ABC se poate construi un triunghi dreptunghi.

Sfera S_a, de exemplu, are același centru și aceeași rază ca cercul R_a; la fel pentru sfera S_b și cercul R_b, pentru sfera S_c și cercul R_c.

Într-adevăr, să presupunem, pentru a fixa ideile, că triunghiul $A_1 B_1 C_1$ este echilateral și că punctul P este situat în

spațiu. Teorema medianei, aplicată succesiv triunghiurilor PB_1C_1, PC_1A_1, PA_1B_1, dă:

$$4PA^2 = 2(PB_1^2 + PC_1^2) - B_1C_1^2,$$
$$4PB^2 = 2(PC_1^2 + PA_1^2) - C_1A_1^2,$$
$$4PC^2 = 2(PA_1^2 + PB_1^2) - A_1B_1^2.$$

Înmulțim aceste egalități respectiv cu -1, 1, 1 și le adunăm; obținem

$$-PA^2 + PB^2 + PC^2 = PA_1^2 - \frac{A_1B_1^2}{4}.$$

Locul geometric al punctului P din spațiu care satisface condiția

$$-PA^2 + PB^2 + PC^2 = 0$$

este dat de ecuația

$$PA_1^2 - \frac{A_1B_1^2}{4} = 0,$$

sau

$$PA_1 = \frac{A_1B_1}{2},$$

care arată că distanța punctului P, variabil în spațiu, la punctul fix A_1, este constantă și egală cu $\frac{A_1B_1}{2}$ sau A_1B, deci punctul P se găsește pe sfera cu centrul A_1 și raza egală cu A_1B, ceea ce trebuia demonstrat.

2. Se arată la fel ca și în cazul unui triunghi oarecare $A_1B_1C_1$, raționamentul din cazul planului, aplicîndu-se la cazul spațiului.

II.33. *O sferă este înscrisă într-un cilindru, fiind tangentă la suprafața laterală a cilindrului de-a lungul ecuatorului E și tangentă la bazele cilindrului în polul ei nord N și polul ei sud S.*

1. *Ce relație există între aria sferei și aria laterală a cilindrului?*

2. *Se consideră solidul format de conurile egale avînd ca bază comună cercul ecuator E și vîrfurile respectiv în N și S; fie V_1 volumul acestui solid, V_2 volumul sferei și V_3 volumul cilindrului. Ce relație există între aceste trei volume?*

Soluție. 1. Aria sferei (fie R raza ei) este $4\pi R^2$; cilindrul are baza un cerc de rază R, iar înălțimea egală cu $2R$, aria lui laterală este $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$, adică aria sferei este egală cu aria laterală a cilindrului.

Această proprietate a fost descoperită de *Arhimede* și se povestește că era așa de mîndru de această descoperire încît a cerut ca pe mormîntul lui să fie ridicat un monument care să reprezinte o sferă înscrisă într-un cilindru.

2. Volumul V_1 este egal cu dublul volumului unui con în care cercul de bază are raza R și înălțimea este R, deci

$$V_1 = 2\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Volumul sferei este

$$V_2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Volumul cilindrului este

$$V_3 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Din valorile lui V_1, V_2, V_3, rezultă

$$V_1 + V_2 = V_3,$$

adică volumul dublului con plus volumul sferei este egal cu volumul cilindrului.

II.34. *Într-un plan P se consideră triunghiul oarecare ABC, fie I centrul cercului înscris și fie A', B', C' punctele de contact ale cercului cu laturile BC, CA, AB. Se notează* (fig. 34):

$$AB = c,\ BC = a,\ CA = b;$$
$$AB' = AC' = l,\ BC' = BA' = m,\ CA' = CB' = n.$$

1. *Să se calculeze l, m, n în funcție de a, b, c.*

2. *Se consideră piramida $SABC$, avînd ca bază triunghiul ABC și ca înălțime $SI = h$.*

Să se calculeze lungimile muchiilor SA, SB, SC ale piramidei în funcție de l, m, n, h și de raza r a cercului înscris (fig. 35).

Soluție. 1. Se vede pe figură că $BC = BA' + A'C$ sau

$$a = m + n;$$

prin permutări circulare deducem

$$b = n + l, \quad c = l + m,$$

iar prin adunare

$$a + b + c = 2\,(l + m + n),$$

deci

$$l = \frac{-a+b+c}{2}, \quad m = \frac{a-b+c}{2}, \quad n = \frac{a+b-c}{2}.$$

2. În triunghiul dreptunghi SIA' avem, după teorema lui Pitagora,

$$SA'^2 = SI^2 + IA'^2$$

sau

$$SA'^2 = h^2 + r^2.$$

Înălțimea SI este perpendiculară pe planul triunghiului ABC, raza IA' a cercului înscris este perpendiculară în A' pe

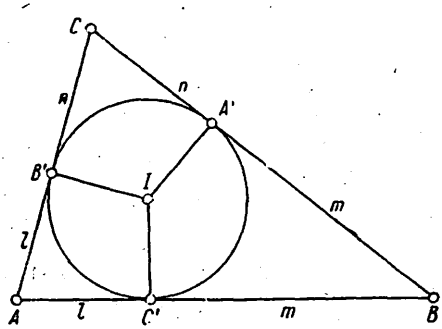


Fig. 34

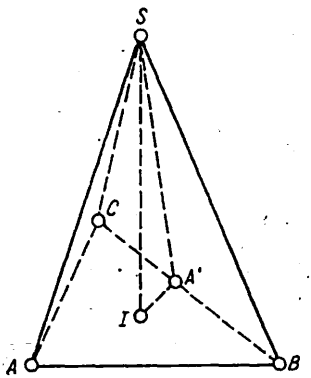


Fig. 35

tangenta BC, rezultă după teorema celor trei perpendiculare că SA' este perpendiculară pe BC, adică triunghiul $CA'S$ este dreptunghi în A'. După teorema lui Pitagora,

$$SC^2 = SA'^2 + A'C^2 = h^2 + r^2 + n^2,$$

iar prin permutări circulare

$$SA^2 = h^2 + r^2 + l^2,$$

$$SB^2 = h^2 + r^2 + m^2.$$

Muchiile SA, SB, SC ale piramidei, în funcție de a, b, c, h, r, sînt :

$$SA^2 = \frac{(-a+b+c)^2}{4} + h^2 + r^2,$$

$$SB^2 = \frac{(+a-b+c)^2}{4} + h^2 + r^2,$$

$$SC^2 = \frac{(+a+b-c)^2}{4} + h^2 + r^2.$$

II.35. *Grîul care curge de la o mașină de treerat umple în medie o găleată într-un minut și 20 secunde ; știind că diametrele bazelor găleții sînt de* 26 cm *și* 30 cm, *înălțimea ei este de* 30 cm, *tabla din care este făcută găleata are o grosime de* 1 mm, *densitatea tablei este* 7,8, *greutatea găleții pline este* 16,5 kg, *să se determine :*

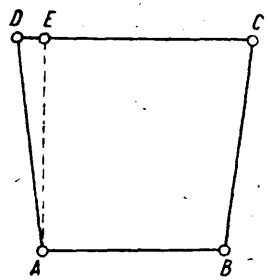


Fig. 36

1. *Greutatea găleții goale.*
2. *Greutatea hectolitrică a grîului.*
3. *Timpul în care se obține la treerat un vagon de grîu* (fig. 36).

Soluție. 1. Volumul exterior V al găleții este volumul unui trunchi de con

$$V = \frac{\pi I (R^2 + r^2 + Rr)}{3}$$

în care $I = 30$, $R = 15$, $r = 13$; se găsește $V = 18495$ cm^3.

Volumul interior v al găleții este volumul unui trunchi de con în care $I = 29{,}9$, $R = 14{,}9$, $r = 12{,}9$; se găsește $v = 18180$ cm^3.

Volumul materialului din care este făcută găleata este egal cu

$$V - v = 315 \text{ cm}^3 = 0{,}315 \text{ dm}^3.$$

Mai putem observa că găleata, avînd o grosime foarte mică, se mai poate afla volumul materialului din care este făcută, înmulțind aria ei exterioară cu grosimea $g = 0{,}1$ cm a tablei.

Suprafața exterioară este

$$S = \pi (R + r)\, G + \pi r^2,$$

în care generatoarea $G = AD$ se calculează din triunghiul dreptunghi AED,

$$G^2 = DE^2 + EA^2 = (R - r)^2 + I^2.$$

Dacă facem înlocuirile, găsim pentru volumul materialului

$$\pi \left[(15 + 13) \sqrt{(15 - 13)^2 + 30^2} + 13^2\right] \cdot 0{,}1 \text{ cm}^3 = 0{,}318 \text{ dm}^3,$$

valoare foarte apropiată de valoarea găsită mai sus.

Greutatea găleții goale este egală cu produsul dintre volumul materialului și densitatea 7,8, adică

$$0{,}315 \times 7{,}8 = 2{,}457 \text{ kg.}$$

2. Volumul găleții este egal cu 18,180 dm^3 = 0,018180 m^3; însă 1 m^3 = 10 hl, deci capacitatea găleții este de 0,1818 hl grîu, iar greutatea acestui grîu este

$$16{,}5 - 2{,}457 = 14{,}043 \text{ kg,}$$

deci un hectolitru de grîu cîntărește

$$\frac{14{,}043}{0{,}1818} = 77 \text{ kg.}$$

3. Se știe că un vagon are 10 000 kg, deci dacă 14,043 kg se macină în 80 sec, 1 vagon se macină în

$$\frac{80 \times 10\,000}{14{,}043} = 56\,968 \text{ s} = 15 \text{ ore, } 49 \text{ min, } 28 \text{ s.}$$

II.36. 1. *Se dă un pătrat $ABCD$ și în interiorul său se duc două drepte perpendiculare una pe alta, dintre care una taie laturile AB și CD în punctele L și M, iar cealaltă laturile BC și AD în punctele N și P. Să se arate:*

a) *că segmentele LM și NP sînt egale*; b) *să se găsească locul geometric al punctului O comun segmentelor LM și NP așa ca figura $LMNP$ să fie*: 1) *un trapez*, 2) *un romb.*

2. *Se dă un dreptunghi $ABCD$ și se cere să i se circumscrie un pătrat*; *se va cerceta numărul soluțiilor și în special ale acelora în care vîrfurile $ABCD$ sînt pe laturile pătratului și nu pe prelungirea lor. Să se exprime aria pătratului în funcție de dimensiunile dreptunghiului $ABCD$.*

Soluție. 1. Ducem dreptele $LI \perp DC$ și $PF \perp BC$. Triunghiurile dreptunghice LIM și PFN sînt egale, căci $LI = PF$, egale amîndouă cu latura pătratului, iar unghiurile IML și FNP egale ca avînd laturile respectiv perpendiculare. Atunci laturile PN și ML, opuse unor unghiuri egale în triunghiuri egale, sînt și ele egale.

1) Să presupunem că figura $LMNP$ este un trapez și anume $PL \parallel MN$. Urmează că unghiurile alterne interne PLM și LMN sînt egale. Dar din patrulaterele inscriptibile $OLAP$ și $ONCM$ vedem că ele au aceeași mărime cu unghiurile PAO și OCN, obținute unind punctul O cu vîrfurile A și C, care sînt deci egale. Cum aceasta însă nu este posibil decît

dacă $OA \parallel OC$, înseamnă că OA și OC sînt în prelungire și formează diagonala AC, care este o parte a locului geometric căutat. Cealaltă diagonală BD completează locul geometric și corespunde cazului în care bazele trapezului sînt laturile LN și MP, adică $LN \parallel MP$.

2) Rombul fiind un paralelogram, o condiție necesară este să avem $PL \parallel MN$ și $LN \parallel MP$, ceea ce înseamnă că centrul paralelogramului să fie tocmai centrul pătratului. Condiția este și suficientă, căci diagonalele LM și NP ale paralelogramului, fiind perpendiculare, el este romb. Mai mult, fiind și egale, el este chiar un pătrat.

Locul geometric se reduce așadar la centrul pătratului $ABCD$, iar toate romburile ce am construi sînt în realitate niște pătrate.

2. Fie xx' și yy' cele două axe de simetrie ale dreptunghiului $ABCD$ (fig. 37). Punctele A, B, C, D, care aparțin și laturilor pătratului cerut, fiind două cîte două simetrice față de xx' și yy', ne arată că și pătratul admite dreptele xx' și yy' ca axe de simetrie. Este însă ușor de văzut că ele nu sînt axele care trec prin mijloacele laturilor pătratului (căci atunci vîrfurile dreptunghiului ar fi distribuite numai pe două dintre laturile pătratului căutat), ci acelea care conțin vîrfurile lui. Ele joacă în pătrat rolul diagonalelor; încît dreptele înclinate la 45° față de xx' și yy', duse prin punctele A, B, C, D, vor forma toate pătratele circumscrise dreptunghiului $ABCD$. Sînt șase soluții: pătratul $EFGH$, purtînd chiar pe laturile lui vîrfurile dreptunghiului; pătratele $IPGN$ și $EOKM$, purtînd aceste vîrfuri pe două dintre laturi și pe prelungirile celorlalte două; și, în sfîrșit, pătratele $IJKL$, $HMLN$ și $OFPJ$, purtînd toate vîrfurile pe prelungiri.

Să notăm $AB = 2a$, $BC = 2b$. Din pătratele $AEBI$ și $BFCL$ deducem $EB = a\sqrt{2}$ și $BF = b\sqrt{2}$.

Deci: $EF = EB + BF = (a + b)\sqrt{2}$ și $EF^2 = 2(a + b)^2$.
Apoi: $IJ = BO = BF - OF = BF - EB = (b - a)\sqrt{2}$, $IJ^2 = 2(b - a)^2$.
Tot astfel: $EO = EB + BO = BO + OF = BF = b\sqrt{2} = IP$ și $EO^2 = IP^2 = 2b^2$;

iar: $OF = EB = a\sqrt{2} = ML$ și $OF^2 = ML^2 = 2a^2$ (fig. 37).

Generalizare. *Să se circumscrie un pătrat unui patrulater ABCD oarecare.* Să presupunem problema rezolvată, $EFGH$ fiind pătratul căutat (fig. 38). Dacă am roti figura cu un unghi drept în jurul centrului O al pătratului, patrulaterul ar ajunge în poziția $A'B'C'D'$, iar pătratul ar coincide cu poziția lui inițială, punctele E', F', G', H' fiind respectiv H, E, F, G. Să observăm că avem

astfel, pentru fiecare latură a pătratului căutat, cîte două puncte cunoscute: A și B', B și C', C și D', D și A' și deci problema este rezolvată. Rămîne să găsim centrul O, care este la întîlnirea diagonalelor EG și FH. Aceste diagonale se construiesc lesne, dacă observăm că ele trec prin mijloacele arcelor cercurilor construite pe laturile patrulaterului ca diametri. De felul cum unim două cîte două aceste

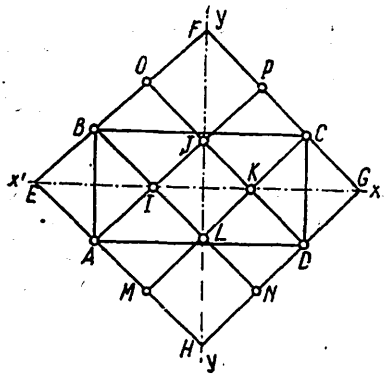


Fig. 37

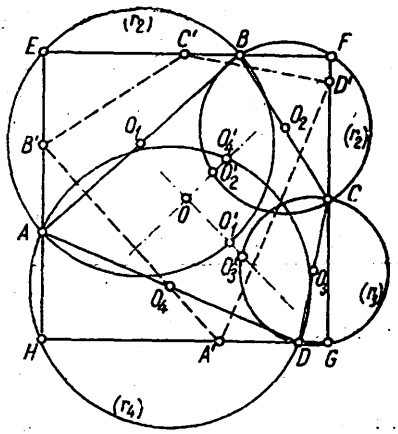


Fig. 38

mijloace ale arcelor de pe cele patru cercuri depinde poziția lui O; deci întîlnim în general mai multe centre, deci mai multe pătrate circumscrise. Dar chiar și unui singur centru se poate întîmpla să-i corespundă mai multe pătrate, ca de exemplu în cazul particular studiat.

III.

ALGEBRĂ ELEMENTARĂ

III.1. *Fie a şi b rădăcinile ecuaţiei*

$$x^2 + mx + 2m = 0,$$

A şi B, rădăcinile ecuaţiei

$$-X^2 + 2mX + m^2 + 3 = 0,$$

în care m este un parametru.

Să se verifice că dacă $m = 2$ sau $m = -2$, avem

$$(a + b)\,AB < (A + B)\,ab.$$

Există şi alte valori ale parametrului m pentru care inegalitatea este satisfăcută?

Soluţie. Relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi dau

$$a + b = -m,\ ab = 2m;\ A + B = 2m,\ AB = -m^2 - 3,$$

iar inegalitatea devine

$$-m\,(-m^2 - 3) < 2m\,(2m)$$

sau

$$m\,(m^2 - 4m + 3) < 0.$$

Pentru $m = 2$ şi $m = -2$, inegalitatea devine respectiv

$$-2 < 0 \text{ şi } -30 < 0,$$

deci inegalitatea dată este satisfăcută pentru $m = \pm 2$.

Să determinăm *toate* valorile lui m pentru care inegalitatea dată este satisfăcută, adică să rezolvăm inegalitatea

$$m\,(m^2 - 4m + 3) < 0.$$

Acest produs este negativ cînd cei doi factori sînt de semne contrarii, adică

$$m < 0 \text{ şi } m^2 - 4m + 3 > 0, \qquad \text{(a)}$$

sau

$$m > 0 \text{ şi } m^2 - 4m + 3 < 0. \qquad \text{(b)}$$

Însă trinomul $m^2 - 4m + 3$ egalat cu zero ne dă o ecuaţie, ale cărei rădăcini sînt 1 şi 3, deci

$$m^2 - 4m + 3 > 0 \text{ pentru } m < 1 \text{ sau } 3 < m;$$
$$m^2 - 4m + 3 < 0 \text{ pentru } 1 < m < 3.$$

Condiţiile (a) şi (b) devin:

$$m < 0 \text{ şi } m < 1 \text{ sau } 3 < m;$$
$$0 < m \text{ şi } 1 < m < 3.$$

În primul caz, inegalităţile simultane $m < 0$, $m < 1$ se reduc la $m < 0$, iar inegalităţile simultane $m < 0$ şi $3 < m$ sînt imposibile; în cazul al doilea, inegalităţile simultane $0 < m$ şi $1 < m < 3$ se reduc la dubla inegalitate $1 < m < 3$. În rezumat, inegalitatea dată

$$E = (a + b)\,AB - (A + B)\,ab < 0$$

este satisfăcută pentru toate valorile lui m cuprinse între limitele

$$-\infty < m < 0 \quad \text{sau} \quad 1 < m < 3,$$

în particular pentru $m = \pm 2$, fiindcă

$$-\infty < -2 < 0 \text{ şi } 1 < 2 < 3.$$

$E = 0$ pentru $m = 0$, $m = 1$ şi $m = 3$, iar $E > 0$ pentru

$$0 < m < 1 \quad \text{sau} \quad 3 < m < +\infty.$$

III. 2. *Dacă în ecuaţia de gradul al doilea în raport cu* x

$$x^2 - 2ax + b = 0 \qquad (1)$$

se înlocuieşte x *cu*

$$x = \frac{ay - b}{y - a} \qquad (2)$$

se obţine o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu y.

Să se arate că rădăcinile ecuaţiei în raport cu y *sînt egale cu rădăcinile ecuaţiei* (1).

Soluţie. Ecuaţia (1) devine, după înlocuire,

$$\frac{(ay - b)^2}{(y - a)^2} - \frac{2a\,(ay - b)}{y - a} + b = 0,$$

sau scăpînd de numitori,

$$(ay - b)^2 - 2a(ay - b)(y - a) + b(y - a)^2 = 0,$$

$$a^2y^2 - 2aby + b^2 - 2a(ay^2 - by - a^2y + ab) + b(y^2 - 2ay + a^2) = 0,$$

$$(b - a^2)y^2 - 2a(b - a^2)y + b(b - a^2) = 0. \qquad (3)$$

Dacă $b - a^2 \neq 0$, ecuațiile (1) și (3) au coeficienți proporționali, deci au rădăcinile egale.

Dacă $b - a^2 = 0$, ecuația (1) are rădăcinile egale cu a, iar transformarea (2) devine

$$x = \frac{ay - a^2}{y - a} \quad \text{sau} \quad x = a,$$

adică x nu mai depinde de y și deci nu se mai pune problema transformării ecuației (1) într-o ecuație (3) în y.

Altă demonstrație este următoarea: relația de legătură între x și y se mai scrie

$$x(y - a) = ay - b \text{ sau } xy - ax - ay + b = 0$$

care scăzută din ecuația (1) membru cu membru dă

$$x(x - y) - a(x - y) = 0 \text{ sau } (x - a)(x - y) = 0$$

și cum $x \neq a$, pentru că $b - a^2 \neq 0$, rezultă $x = y$.

Reciproca. Relația de legătură între x și y se mai scrie

$$xy - a(x + y) + b = 0,$$

care fiind simetrică în raport cu x și y, definește o transformare numită *involuție*, adică *transformarea omografică* de la y la x este identică cu transformarea de la x la y,

$$x = \frac{ay - b}{y - a} \quad \text{și} \quad y = \frac{ax - b}{x - a}.$$

Se pune problema: *care este condiția ca ecuația*

$$x^2 - 2Ax + B = 0 \qquad (4)$$

să se transforme, prin involuția (2), *într-o ecuație în* y, *ale cărei rădăcini să fie egale cu rădăcinile ecuației* (4)?

Dacă în ecuția (4) facem înlocuirea (2), obținem

$$y^2(a^2 - 2Aa + B) - 2y[ab - A(b + a^2) + Ba] + \\ + (b^2 - 2Aab + Ba^2) = 0. \qquad (5)$$

Rădăcinile ecuației (5) sînt egale cu cele ale ecuației (4) cînd coeficienții lor sînt respectiv proporționali, adică

$$a^2 - 2Aa + B = \frac{ab - A(b + a^2) + Ba}{A} = \frac{b^2 - 2Aab + Ba^2}{B}.$$

Sistemul este verificat dacă $A = a$, $B = b$, ceea ce era de prevăzut din problema directă; să presupunem $A \neq a$. Înmulțim primul raport, la numărător și la numitor, cu a, apoi scriem că primele două rapoarte sînt egale cu diferența numărătorilor supra diferența numitorilor și obținem raportul

$$\frac{(a - b^2)(a - A)}{A}, \text{ adică } a^2 - b.$$

Scriind că fiecare din cele trei rapoarte este egal cu $a^2 - b$, obținem relațiile:

$$\begin{aligned} -2Aa &+ B + b = 0, \\ -2Aab &+ Bb + b^2 = 0, \\ -2Aa^2 &+ Ba + ab = 0, \end{aligned}$$

care se reduc, toate trei, la relația

$$B + b = 2Aa.$$

Rezultatul obținut poate fi enunțat în felul următor: prin involuția (2), ecuația (4) se transformă în ecuația (5) cu rădăcinile egale cu cele ale ecuației inițiale (4), în două cazuri:

$$A = a \text{ și } B = b; \tag{I}$$

$$2Aa = B + b. \tag{II}$$

În cazul (I), ecuația (4) are forma

$$x^2 - 2ax + b = 0,$$

iar în cazul (II), forma

$$x^2 - 2\lambda x + 2\lambda a - b = 0,$$

unde λ este un parametru variabil.

Propunem să se studieze problema analogă, luînd în locul ecuației (4) de gradul al doilea, o ecuație de gradul al treilea sau de gradul n.

III. 3. *Să se discute natura rădăcinilor ecuației*

$$x^2 - 2x(3p + 1) + 7(2p + 3) = 0$$

pentru diferitele valori ale parametrului p.

Soluție. Discriminantul ecuației este

$$D = (3p + 1)^2 - 7(2p + 3) = 9p^2 - 8p - 20,$$

iar $D=0$ pentru $p = -\frac{10}{9}$ și $p = 2$. Urmează că rădăcinile x_1 și x_2 sînt:

reale și diferite, dacă $D > 0$, adică $p < -\frac{10}{9}$ sau $p > 2$;

reale și egale, dacă $D = 0$, adică $p = -\frac{10}{9}$ sau $p = 2$;

imaginare, dacă $D < 0$, adică $-\frac{10}{9} < p < 2$.

Pe de altă parte, produsul rădăcinilor $7(2p + 3)$ este pozitiv pentru $p > -\frac{3}{2}$ și negativ pentru $p < -\frac{3}{2}$, iar semisuma rădăcinilor $(3p + 1)$ este pozitivă pentru $p > -\frac{1}{3}$ și negativă pentru $p < -\frac{1}{3}$.

Putem forma următoarea tabelă:

p	D	x_1x_2	x_1+x_2	rădăcinile
$-\infty$	+	−	−	reale, negativă și pozitivă
$-\frac{3}{2}$	+	0	−	reale, negativă și nulă
	+	+	−	reale, diferite și negative
$-\frac{10}{9}$	0	+	−	reale și egale cu $-\frac{7}{3}$
	−	+	+	imaginare
2	0	+	+	reale și egale cu 7
	+	+	+	reale, diferite și pozitive
$+\infty$				

Observație. Dacă notăm parametrul p cu litera y, ecuația dată se scrie

$$x^2 - 6xy - 2x + 14y + 21 = 0$$

şi reprezintă, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy, o conică, cu centrul în punctul de coordonate $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{9}\right)$. Direcţiile asimptotice sînt date de ecuaţia $x^2-6xy=0$ sau $0\cdot m^2-6m+1=0$, ale cărei rădăcini sînt $m_1=\frac{1}{6}$ şi $m_2=\infty$ deci conica este o hiperbolă, ale cărei asimptote au ecuaţiile

$$x=\frac{7}{3} \quad \text{şi} \quad y-\frac{4}{9}=\frac{x-\frac{7}{3}}{6}.$$

Hiperbola are tangenta orizontală în punctul $A\left(-\frac{7}{3}, -\frac{10}{9}\right)$, care este punctul de maxim al ramurii $A'A''$, şi în punctul $B(7,2)$, care este punctul de minim al ramurii $B'B''$; arcul AA' taie axa Oy în punctul $C\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

Din forma curbei se deduce *intuitiv* întreaga discuţie; într-adevăr, fie AT_1 BT_2, CT_3 paralele la Ox duse prin A, B, C. O paralelă PQ la Ox, situată sub CT_3 taie arcul $A'A$ în P şi arcul AA'' în Q, ceea ce revine a spune că pentru $y<-\frac{3}{2}$, corespund pentru x două rădăcini reale, abscisele punctelor P şi Q, prima negativă, cealaltă pozitivă.

Dacă dreapta PQ coincide cu CT_3, adică $y=-\frac{3}{2}$, punctul Q coincide cu C, adică o rădăcină, abscisa lui Q, este nulă, iar cealaltă, abscisa lui P, este negativă.

Dacă dreapta PQ este cuprinsă între TC_3 şi AT_1, adică $-\frac{3}{2}<y<-\frac{10}{9}$, ea taie arcul $A'A$ în P şi arcul AC în Q, ale căror abscise sînt reale diferite şi negative.

Dacă dreapta PQ coincide cu AT_1, adică $y=-\frac{10}{9}$, punctele P şi Q coincid cu A şi abscisele lor sînt egale cu $-\frac{7}{3}$.

Dacă dreapta PQ este cuprinsă între dreptele AT_1 şi BT_2, ea nu taie hiperbola în nici un punct, adică pentru $-\frac{10}{9}<y<2$, ecuaţia are rădăcinile imaginare.

Dacă dreapta PQ coincide cu tangenta BT_2, adică $y=2$, punctele ei de intersecţie P şi Q cu ramura $B'BB''$ coincid cu B, şi abscisele lor sînt egale cu 7.

În fine, dacă dreapta PQ este situată deasupra tangentei BT_2, adică $y>2$, ea taie arcul $B'B$ în P şi arcul BB'' în Q, ale căror abscise sînt reale, diferite şi pozitive.

III.4. *Se dă ecuaţia de gradul al doilea*

$$x^2 + 2(3y - 2)x + y^2 - 4y + 20 = 0$$

şi se cere:

1. *Dacă x este necunoscut, iar y un parametru, să se determine valorile parametrului y pentru care rădăcinile sînt reale.*

2. *Dacă y este necunoscut, iar x un parametru, să se determine valorile parametrului x pentru care rădăcinile sînt reale.*

Soluţie. 1. Discriminantul ecuaţiei este

$$D = 4(3y - 2)^2 - 4(y^2 - 4y + 20) = 32(y^2 - y - 2),$$

iar $D = 0$ pentru $y = -1$ sau $y = 2$. Urmează că rădăcinile x_1 şi x_2 sînt:

reale şi diferite, dacă $D > 0$, adică $y < -1$ sau $y > 2$;
reale şi egale, dacă $D = 0$, adică $y = -1$ sau $y = 2$;
imaginare, dacă $D < 0$, adică $-1 < y < 2$.

Pe de altă parte, trinomul $y^2 - 4y + 20$ avînd rădăcinile imaginare, este pozitiv, pentru toate valorile lui y, deci produsul $x_1 x_2 = y^2 - 4y + 20$ fiind pozitiv, rădăcinile x_1 şi x_2 au totdeauna acelaşi semn. Suma rădăcinilor $x_1 + x_2 = 2(2 - 3y)$ este pozitivă pentru $y \leqslant -1$ şi negativă pentru $y \geqslant 2$, deci rădăcinile x_1 şi x_2 sînt:

reale, diferite şi pozitive pentru $y < -1$;
reale, egale şi pozitive pentru $y = -1$; $x_1 = x_2 = +5$;
reale, egale şi negative pentru $y = +2$; $x_1 = x_2 = -4$;
reale, diferite şi negative pentru $y > 2$.

2. Dacă y este necunoscuta, iar x parametru, ecuaţia se scrie

$$y^2 + 2(3x - 2)y + x^2 - 4x + 20 = 0$$

şi se deduce din ecuaţia dată schimbînd între ele literele x şi y deci discuţia este aceeaşi ca în primul caz.

O b s e r v a ţ i e. Ecuaţia dată fiind simetrică în raport cu x şi y, reprezintă o curbă simetrică în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate Ox, Oy (fig. 39).

Dacă facem descompunerea în pătrate, ecuaţia se mai scrie

$$(y + 3x - 2)^2 - 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 18 = 0$$

şi ea reprezintă o hiperbolă, cu centrul în punctul de coordonate (1/2, 1/2) şi ale cărei asimptote au ecuaţiile

$$y - \frac{1}{2} = -(3 + 2\sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$y - \frac{1}{2} = -(3 - 2\sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Hiperbola are tangentele orizontale în punctele $A(5, -1)$ și $B(-4, 2)$ și tangentele verticale în punctele $C(2, -4)$ și $D(-1, 5)$. Din forma curbei se deduce intuitiv întreaga discuție; astfel, *se vede* că o dreaptă paralelă cu Ox, și de ordonată mai mică decît -1, taie curba în două puncte P și Q, ale căror abscise

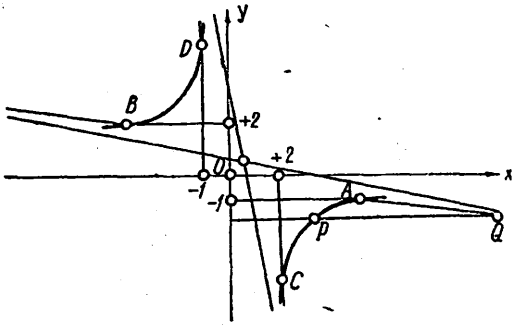


Fig. 39

sînt pozitive, ceea ce revine a spune că pentru $y < -1$, ecuația dată are două rădăcini reale diferite și pozitive.

III.5. *Care este ora exactă, între orele* 10 *și* 11, *cînd cele două ace ale unui ceasornic au direcțiile perpendiculare?*

Problema admite două soluții și se cere să se calculeze ambele soluții.

Soluție. Fix la zero (sau la ora 12), minutarul și orarul coincid (fac un unghi de zero grade). Într-o oră (60 minute), minutarul descrie întreg cercul, adică un unghi de 360°, deci în t minute (de timp), minutarul descrie un unghi de $\frac{t \times 360}{60}$ grade. Tot într-o oră (60 minute), orarul descrie un unghi de 30°, deci în t minute (de timp), el va descrie un unghi de $\frac{t \times 30}{60}$ grade. În momentul inițial, adică la ora zero fix, unghiul format de minutar și orar era egal cu zero grade, iar după t minute de timp, unghiul lor este egal cu diferența $\frac{t \times 360}{60} - \frac{t \times 30}{60}$ grade, adică $\frac{11t}{2}$ grade. Prin ipoteză, minutarul și orarul au direcțiile perpendiculare, deci unghiul lor este egal cu 90° sau cu 270°, de unde rezultă

$$\frac{11t}{2} = 90 \quad \text{sau} \quad \frac{11t}{2} = 270$$

adică

$$t = \frac{180}{11} \quad \text{sau} \quad t = \frac{540}{11}.$$

Făcînd împărţirile şi ţinînd seama că t este exprimat în minute de timp, găsim

$t = 16$ minute, 21 secunde şi $\frac{9}{11}$ dintr-o secundă;

$t = 49$ minute, 5 secunde şi $\frac{5}{11}$ dintr-o secundă.

Între orele 0 şi 1, cele două ace ale ceasornicului au direcţiile perpendiculare la :

0 ore, 16 minute, 21 secunde şi $\frac{9}{11}$ dintr-o secundă

şi

0 ore, 49 minute, 5 secunde şi $\frac{5}{11}$ dintr-o secundă.

Printr-un raţionament analog se găseşte ora exactă, între orele 10 şi 11, cînd cele două ace sînt perpendiculare. La ora 10 fix, minutarul şi orarul fac un unghi de 60°; în t minute, acest unghi a crescut cu $\frac{11t}{2}$ grade. Pentru ca cele două ace să aibă direcţiile perpendiculare, trebuie ca această creştere să fie egală cu 30° sau 210°, deci avem soluţiile $\frac{11t}{2} = 30$ sau $\frac{11t}{2} = 210$, de unde

$t = \frac{60}{11} =$ 5 minute, 27 secunde şi $\frac{3}{11}$ dintr-o secundă

şi

$t = \frac{420}{11} = 38$ minute, 10 secunde şi $\frac{10}{11}$ dintr-o secundă.

Între orele 10 şi 11, cele două ace ale ceasornicului au direcţiile perpendiculare la :

10 ore, 5 minute, 27 secunde şi $\frac{3}{11}$ dintr-o secundă

şi

10 ore, 38 minute, 10 secunde şi $\frac{10}{11}$ dintr-o secundă.

III. 6. *n fiind un număr întreg, să se arate că expresia*

$$E = n(n^2 - 1)(n^2 - 2)(n^2 - 4)$$

se divide cu 840.

Soluţie. Numărul 840 descompus în factori primi se scrie $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$. Ca să dovedim că expresia E se divide cu 840, va trebui să dovedim că E se divide cu fiecare din factorii 2^3, 3, 5, 7.

Se observă că E se poate scrie

$$E = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n^2 - 2).$$

Primii cinci factori sînt numere întregi consecutive; printre ele există deci cu siguranţă un multiplu de 3, un multiplu de 4 şi un multiplu de 5. Expresia E se divide deci cu 3, cu 4, cu 5, deci şi cu $3 \times 4 \times 5 = 60$.

Să dovedim acum că expresia se divide şi prin 8 şi prin 7.

Am spus că printre numerele $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, există cu siguranţă un multiplu de 4, adică un număr par divizibil cu 4. Dar, printre aceste cinci numere mai există cu siguranţă un al doilea număr par. De exemplu, dacă $n - 2 = \mathscr{M}4$, atunci $n = \mathscr{M}2$; dacă $n - 1 = \mathscr{M}4$, $n + 1 = \mathscr{M}2$; dacă $n = \mathscr{M}4$, $n + 2 = \mathscr{M}2$; dacă $n + 1 = \mathscr{M}4$, $n + 1 = \mathscr{M}2$; în fine dacă $n + 2 = \mathscr{M}4$, $n = \mathscr{M}2$. Este stabilit deci, că între cele cinci numere consecutive de mai sus există cu siguranţă un multiplu de 4 şi un multiplu de 2.

Produsul celor cinci numere consecutive se divide deci prin $4 \times 2 = 2^3$, deci expresia E se divide prin 8.

Rămîne să se demonstreze că E se divide şi prin 7. Se observă că orice număr întreg poate avea faţă de 7 una din formele: $\mathscr{M}7$; $\mathscr{M}7 + 1$; $\mathscr{M}7 + 2$; $\mathscr{M}7 + 3$; $\mathscr{M}7 + 4 = \mathscr{M}7 + 7 - 3 = \mathscr{M}7 - 3$; $\mathscr{M}7 + 5 = \mathscr{M}7 + 7 - 2 = \mathscr{M}7 - 2$; $\mathscr{M}7 + 6 = \mathscr{M}7 + 7 - 1 = \mathscr{M}7 - 1$, sau dacă scriem concentrat:

$$\mathscr{M}7; \quad \mathscr{M}7 \pm 1; \quad \mathscr{M}7 \pm 2; \quad \mathscr{M}7 \pm 3.$$

Dacă $n = \mathscr{M}7$, atunci expresia se divide prin 7 căci conţine în factor pe n.

Dacă $n = \mathscr{M}7 \pm 1$, atunci avem evident $n^2 = \mathscr{M}7 + 1$, $n^2 - 1 = \mathscr{M}7$, deci şi în acest caz expresia se divide prin 7 căci conţine în factor pe $n^2 - 1$.

Dacă $n = \mathscr{M}7 \pm 2$, atunci avem $n^2 = \mathscr{M}7 + 2^2 = \mathscr{M}7 + 4$, $n^2 - 4 = \mathscr{M}7$, expresia de asemenea se divide prin 7 căci conţine factorul $n^2 - 4$.

Dacă $n = \mathscr{M}7 \pm 3$, atunci avem $n^2 = \mathscr{M}7 + 3^2 = \mathscr{M}7 + 9 = \mathscr{M}7 + 2$, $n^2 - 2 = \mathscr{M}7$, deci şi în cazul acesta expresia se divide prin 7.

În rezumat, oricare ar fi n întreg, expresia E se divide prin 2^3, 3, 5, 7, deci se divide şi prin $2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$.

III.7. *Să se arate că expresiile*

$$E_1 = (2n + 1)^5 - 2n - 1, \quad E_2 = n^9 - n^3,$$

se divid respectiv prin 240 *şi* 504, *dacă* n *este un număr întreg.*

Soluţie. 1. Expresia E_1 se poate scrie succesiv

$$E_1 = (2n + 1)\,[(2n + 1)^4 - 1],$$
$$E_1 = (2n + 1)\,[(2n + 1)^2 - 1]\,[(2n + 1)^2 + 1],$$
$$E_1 = (2n + 1)\,(2n + 1 + 1)\,(2n + 1 - 1)\,(4n^2 + 4n + 2),$$
$$E_1 = 2^3 n\,(n + 1)\,(2n + 1)\,(2n^2 + 2n + 1).$$

Observăm acum că $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Va trebui să dovedim că expresia E_1 se divide cu fiecare din factorii 2^4, 3, 5.

Numerele n şi $n + 1$ sînt consecutive, deci unul din ele este cu siguranţă divizibil cu 2; de altă parte E_1 conţine în factor pe 2^3, deci expresia E_1 se divide prin $2^3 \times 2 = 2^4$. Să arătăm acum că se divide prin 3. Orice număr întreg n poate avea faţă de 3 una din formele $n = \mathscr{M}3$, $n = \mathscr{M}3 + 1$, $n = \mathscr{M}3 - 1$. Dacă $n = \mathscr{M}3$, expresia E_1 se divide prin 3 căci conţine în factor pe n. Dacă $n = \mathscr{M}3 - 1$, atunci $n + 1 = \mathscr{M}3$, deci şi în acest caz E_1 se divide prin 3 căci conţine factorul $n + 1$. Dacă $n = \mathscr{M}3 + 1$, atunci $2n + 1 = \mathscr{M}3 + 2 + 1 = \mathscr{M}3$, deci şi în acest caz E_1 se divide prin 3 căci conţine factorul $2n + 1$.

Aşa dar oricare ar fi n, expresia E_1 se divide prin 2^4 şi 3. Să arătăm că se divide şi prin 5 oricare ar fi n. Orice număr întreg n poate avea faţă de 5 una din formele: $n = \mathscr{M}5$, $n = \mathscr{M}5 + 1$, $n = \mathscr{M}5 - 1$, $n = \mathscr{M}5 + 2$, $n = \mathscr{M}5 - 2$. Dacă $n = \mathscr{M}5$, E_1 se divide cu 5 din cauza factorului n. Dacă $n = \mathscr{M}5 + 1$, atunci $n^2 = \mathscr{M}5 + 1$, $2n^2 + 2n + 1 = \mathscr{M}5 + 2 + 2 + 1 = \mathscr{M}5$, deci expresia E_1, conţinînd factorul $2n^2 + 2n + 1$, se divide prin 5. Dacă $n = \mathscr{M}5 - 1$, atunci $n + 1 = \mathscr{M}5$, deci E_1 se divide prin 5, din cauza factorului $n + 1$. Dacă $n = \mathscr{M}5 + 2$, atunci $2n + 1 = \mathscr{M}5 + 4 + 1 = \mathscr{M}5$, deci E_1 se divide prin 5, din cauza factorului $2n + 1$. Dacă $n = \mathscr{M}5 - 2$, atunci $n^2 = \mathscr{M}5 + 4$, $2n^2 + 2n + 1 = \mathscr{M}5 + 8 - 4 + 1 = \mathscr{M}5$, expresia E_1 de asemenea se divide prin 5 din cauza factorului $2n^2 + 2n + 1$.

În rezumat, oricare ar fi numărul întreg n, expresia E_1 se divide prin 2^4, 3, 5, deci și prin 240.

Observație. Divizibilitatea expresiei E_1 prin 5 și prin 3 se poate arăta și în alt mod mai simplu. Dacă numărul $2n + 1$ este divizibil cu 5, atunci evident că E_1 se divide prin 5. Dacă $2n + 1$ este prim cu 5 atunci, după teorema lui *Fermat*, expresia $(2n+1)^4 - 1$ se divide prin 5, deci și expresia E_1 se divide prin 5.

De asemenea dacă $2n + 1$ se divide prin 3, evident că și E_1 se divide prin 3; dacă $2n + 1$ este prim cu 3, atunci expresia $(2n + 1)^2 - 1$ se divide prin 3, conform teoremei lui *Fermat*, deci și E_1 se divide prin 3.

2. Expresia E_2 se scrie succesiv

$$E_2 = n^3 (n^6 - 1), E_2 = n^3 (n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1),$$

$$E_2 = n^3 (n - 1)(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Numărul 504 se scrie $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Va trebui să dovedim că E_2 se divide cu fiecare din factorii : 2^3, 3^2, 7.

Orice număr întreg n are față de 2 una din formele

$$n = \mathscr{M}2, \; n = \mathscr{M}2 + 1.$$

Dacă $n = \mathscr{M}2$, E_2 conținînd în factor pe n^3 se divide prin 2^3.

Dacă $n = \mathscr{M}2 + 1$, atunci $n + 1 = \mathscr{M}2 + 2 = \mathscr{M}2$; $n - 1 = \mathscr{M}2$, deci numerele $n - 1$, $n + 1$ sînt două numere pare consecutive, unul din ele este deci cu siguranță multiplu de 4, produsul lor este deci multiplu de $2 \times 4 = 2^3$. Rezultă că E_2 se divide și în acest caz prin 2^3.

Numărul întreg n poate avea față de 3 una din formele $n = \mathscr{M}3, n = \mathscr{M}3 + 1, \; n = \mathscr{M}3 - 1$.

Dacă $n = \mathscr{M}3$, E_2 se divide prin 3^3 din cauza factorului n^3. Dacă $n = \mathscr{M}3+1$, atunci $n-1 = \mathscr{M}3$, $n^2 = \mathscr{M}3+1$, $n^2+ + n + 1 = \mathscr{M}3+1+1+1 = \mathscr{M}3$, deci și în acest caz E_2 se divide prin 3^2 din cauza factorilor $n - 1$, $n^2 + n + 1$. Dacă, $n = \mathscr{M}3-1$, atunci $n+1 = \mathscr{M}3$, $n^2 = \mathscr{M}3 + 1$, $n^2-n+1 = = \mathscr{M}3 + 1 + 1 + 1 = \mathscr{M}3$, E_2 se divide prin 3^2 din cauza factorilor $n + 1$, $n^2 - n + 1$.

Față de 7 numărul întreg n poate avea una din formele $n = \mathscr{M}7, n = \mathscr{M}7+1, n = \mathscr{M}7+2, n = \mathscr{M}7+3, n = \mathscr{M}7-1, n = \mathscr{M}7 - 2, \; n = \mathscr{M}7-3$. Dacă n are una din formele : $\mathscr{M}7, \mathscr{M}7 + 1, \mathscr{M}7-1$, atunci factorii $n, n-1, n + 1$, respectiv, fiind multipli de 7, expresia E_2 se devide prin 7. Dacă $n = \mathscr{M}7+2$, atunci $n^2 = \mathscr{M}7 + 4$, $n^2 + n + 1 = \mathscr{M}7 + 4+$

$+ 2 + 1 = \mathscr{M}7$, deci E_2 se divide prin 7, avînd pe $n^2 + n + 1$ în factor. Dacă $n = \mathscr{M}7 - 2$, atunci $n^2 = \mathscr{M}7 + 4$, $n^2 - n + 1 = \mathscr{M}7 + 4 + 2 + 1 = \mathscr{M}7$, deci E_2 se divide prin 7 din cauza factorului $n^2 - n + 1$. Dacă $n = \mathscr{M}7 + 3$, atunci $n^2 = \mathscr{M}7 + 9$, $n^2 - n + 1 = \mathscr{M}7 + 9 - 3 + 1 = \mathscr{M}7$, deci E_2 se divide prin 7 din cauza factorului $n^2 - n + 1$. Dacă $n = \mathscr{M}7 - 3$ atunci $n^2 = \mathscr{M}7 + 9$, $n^2 + n + 1 = \mathscr{M}7 + 9 - -3 + 1 = \mathscr{M}7$, deci și în acest caz E_2 se divide prin 7.

În concluzie, oricare ar fi numărul întreg n, expresia E_2 se divide prin 2^3, 3^2, 7 deci prin 504.

Observație. Pentru a scurta demonstrația divizibilității cu 7, se putea folosi și aici teorema lui *Fermat*. În adevăr, dacă n este prim cu 7, expresia $n^6 - 1$ se divide prin 7, după teorema amintită. Dacă n este multiplu de 7, evident că E_2 se divide prin 7.

III.8. *Să se discute rădăcinile ecuației*

$$(m + 1)x^2 - 2mx + (m - 3) = 0$$

pentru valorile lui m.

În particular să se găsească valoarea rădăcinilor pentru $m = \infty$.

Soluție. Valorile importante ale lui m sînt valorile care anulează discriminantul ecuației și coeficienții ei; avem

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{2m+3}}{m + 1}, \qquad x_2 = \frac{m - \sqrt{2m+3}}{m + 1}.$$

Rădăcinile sînt reale pentru valorile lui m mai mari ca $-\frac{3}{2}$.

1. Pentru $m = -\infty$, $\lim x_1 = \lim x_2 = 1$.

2. Pentru $m = -\frac{3}{2}$, o rădăcină dublă egală cu 3.

3. Cînd coeficientul lui x^2 se anulează, o rădăcină devine infinită; într-adevăr, pentru $m = -1$, $x_2 = -\infty$, $x_1 = 0$.

4. Cînd coeficientul lui x se anulează, rădăcinile sînt opuse: pentru $m = 0$, $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$.

5. Cînd termenul liber se anulează, o rădăcină devine nulă; pentru $m = 3$, $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{3}{2}$.

6. Pentru $m = +\infty$ ca și pentru $m = -\infty$,

$$\lim x_1 = \lim x_2 = 1.$$

Tabel rezumativ:

m	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3	$+\infty$
x_1	1	3	0	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$	1
x_2	1	3	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	1

Pentru 3 valori ale lui m: $-\infty$, $-\frac{3}{2}$, $+\infty$, rădăcinile ecuației propuse iau valori egale.

Mai rămîne de discutat semnul rădăcinilor cînd m este cuprins în intervalele determinate de valorile de mai sus. Discuția se face cu ajutorul expresiilor sumei și produsului rădăcinilor.

$$S = \frac{2m}{m+1}, \quad P = \frac{m-3}{m+1}.$$

a) $-\infty < m < -\frac{3}{2}$; rădăcinile ecuației sînt imaginare conjugate, suma și produsul lor sînt reale și pozitive.

b) $-\frac{3}{2} < m < -1$; $P > 0$, $S > 0$; ambele rădăcini pozitive.

c) $-1 < m < 0$; $P < 0$, $S < 0$; rădăcini de semn contrar; cea mai mare este negativă.

d) $0 < m < 3$; $P < 0$, $S > 0$; rădăcini de semn contrar; cea mai mare este pozitivă.

e) $3 < m < +\infty$; $P > 0$, $S > 0$; ambele rădăcini pozitive.

III.9. *Se presupune că în ecuația $x^2 + 2px + q = 0$, coeficienții sînt legați prin relația $p + q = 1$. Între ce limite variază p și q, pentru ca rădăcinile ecuației să fie reale? Să se dea și o reprezentare geometrică, presupunînd că p și q sînt coordonatele unui punct variabil din plan.*

Soluție. Condiția ca rădăcinile ecuației să fie reale este $p^2 - q \geqslant 0$. Din relația de condiție $p + q = 1$, deducem $q = 1 - p$, deci p verifică inecuația

$$p^2 + p - 1 \geqslant 0,$$

de unde deducem condițiile

$$p \geqslant -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad p \leqslant -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Înlocuind în fiecare din ele $p = 1 - q$, deducem condițiile corespunzătoare pentru q

$$q \leqslant \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad q \geqslant \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Așadar rădăcinile ecuației date sînt reale cînd

$$p \geqslant -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{și} \quad q \leqslant \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},$$

sau cînd

$$p \leqslant -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{și} \quad q \geqslant \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Interpretarea geometrică este următoarea :

Pentru ca rădăcinile ecuației date să fie reale, trebuie ca punctul $M(p, q)$ să se găsească în regiunea pozitivă a parabolei $x^2 - y = 0$ și în același timp pe dreapta $x + y = 1$.

Parabola $x^2 - y = 0$ este tangentă în origine la Ox și cu ramurile spre y pozitiv. Dreapta $x + y = 1$ este paralelă cu bisectoarea a doua a axelor. Regiunea pozitivă a parabolei — se vede imediat — este cea exterioară parabolei. Cele două linii se taie în punctele

$$A\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, \ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad B\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right),$$

Pentru ca rădăcinile să fie reale, trebuie ca punctul $M(p,q)$ să se afle pe dreapta AB, în afara parabolei. Cînd M vine în A sau B, rădăcinile sînt egale.

III.10. *Se consideră polinoamele*

$$y(x) = x - 2 - \frac{3}{2}, \tag{1}$$

$$Y(x) = (x-2)^2 - 3(x-2) + \frac{3}{2}. \tag{2}$$

1. *Să se arate că dacă x' și x'' sînt rădăcinile ecuației $Y(x) = 0$, avem relația $y(x') + y(x'') = 0$.*

2. *Să se arate că notînd cu m un număr oarecare, pozitiv sau negativ, avem relațiile*

$$y\left(\frac{7}{2}+m\right)+y\left(\frac{7}{2}-m\right)=0, \quad Y\left(\frac{7}{2}+m\right)-Y\left(\frac{7}{2}-m\right)=0.$$

3. *Să se reprezinte grafic, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy, funcțiile $y(x)$ și $Y(x)$ de mai sus, cînd x variază între 2 și 5.*

4. *Să se demonstreze că ecuația*

$$x-2-\frac{3}{2}-k\left\{(x-2)^2-3(x-2)+\frac{3}{2}\right\}=0,$$

în care k este un număr oarecare, are rădăcinile reale.

Să se arate că una din aceste rădăcini este cuprinsă între rădăcinile x' și x'' ale ecuației $(x-2)^2-3(x-2)+\frac{3}{2}=0$.

Soluție. 1. Avem

$$y^2(x) = (x-2)^2 - 3(x-2) + \frac{9}{4},$$

deci

$$y^2(x) = Y(x) + \frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Făcînd în această identitate succesiv $x = x'$, $x = x''$ avem

$$y^2(x') = Y(x') + \frac{3}{4}, \qquad y^2(x'') = Y(x'') + \frac{3}{4}.$$

Dar $Y(x')=Y(x'')=0$, deci $y^2(x')=y^2(x'')=\frac{3}{4}$.

De aici rezultă

$$[y(x') - y(x'')]\,[y(x') + y(x'')] = 0. \qquad (4)$$

Observăm că $x' \neq x''$, căci trinomul $Y(x)$ nu este pătrat perfect. Urmează că $y(x') \neq y(x'')$, deoarece polinomul de gradul întîi, $y(x)$ nu poate lua valori egale pentru două valori distincte

x', x'' ale lui x. Deci, pentru ca identitatea (4) să existe, trebuie ca

$$y(x') + y(x'') = 0. \tag{5}$$

$$y\left(\frac{7}{2}+m\right) = \frac{7}{2}+m-\frac{7}{2} = m,$$

$$y\left(\frac{7}{2}-m\right) = \frac{7}{2}-m-\frac{7}{2} = -m, \tag{6}$$

$$y\left(\frac{7}{2}+m\right) + y\left(\frac{7}{2}-m\right) = m-m = 0.$$

Din identitatea (3) deducem

$$Y\left(\frac{7}{2}+m\right) - Y\left(\frac{7}{2}-m\right) = y^2\left(\frac{7}{2}+m\right) - y^2\left(\frac{7}{2}-m\right) =$$

$$= \left[y\left(\frac{7}{2}+m\right) + y\left(\frac{7}{2}-m\right)\right]\left[y\left(\frac{7}{2}+m\right) - y\left(\frac{7}{2}-m\right)\right]$$

şi avînd în vedere identitatea (6), reiese

$$Y\left(\frac{7}{2}+m\right) - Y\left(\frac{7}{2}-m\right) = 0.$$

3. Ecuaţia

$$y = x - 2 - \frac{3}{2} \quad \text{sau} \quad y = x - \frac{7}{2}$$

reprezintă o dreaptă paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate. Ea taie dreptele $x = 2$, $x = 5$ în punctele

$$A\left(2, -\frac{3}{2}\right), \quad B\left(5, \frac{3}{2}\right).$$

Ecuaţia $Y = (x-2)^2 - 3(x-2) + \frac{3}{2}$ sau $Y = x^2 - 7x + \frac{23}{2}$ reprezintă o parabolă avînd concavitatea îndreptată către y pozitiv. Vîrful parabolei este $V\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}\right)$. Ea taie axa Ox în punctele $C(x', 0)$, $C'(x'', 0)$, taie dreptele $x = 2$, $x = 5$ în punctele $A'\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(5, \frac{3}{2}\right)$ şi taie dreapta AB în punctele $B\left(5, \frac{3}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

4. Ecuația

$$x-2-\frac{3}{2}+k\left\{(x-2)^2-3(x-2)+\frac{3}{2}\right\}=0, \qquad (7)$$

pe baza identității (3) se scrie

$$y(x)+k\left\{y^2(x)-\frac{3}{4}\right\}=0, \text{ sau } ky^2(x)+y(x)-\frac{3k}{4}=0.$$

De aici deducem

$$y(x)=\frac{1}{2k}\pm\frac{\sqrt{1+3k^2}}{2k},$$

rădăcinile ecuației (7) sînt deci $x_{1,2}=\frac{7}{2}+\frac{-1\pm\sqrt{1+3k^2}}{2k}$.

Se vede că oricare ar fi numărul k real, aceste rădăcini sînt reale.

Să arătăm acum că una din rădăcinile ecuației (7) este cuprinsă între rădăcinile x', x'' ale ecuației $Y(x)=0$. Însemnăm cu $f(x)$ prima parte a ecuației (7). Avem $f(x)=y(x)+kY(x)$.

Deducem de aici relațiile

$$f(x')=y(x')+kY(x')=y(x'),\ f(x'')=y(x'')+kY(x'')=y(x'');$$
$$f(x')\times f(x'')=y(x')\times y(x'').$$

Ținînd seama că $y(x')+y(x'')=0$, deducem $f(x')\times f(x'')=-y^2(x')<0$, deci ecuația $f(x)=0$ are o rădăcină cuprinsă între x' și x''.

III.11. *Se dau două numere pozitive $a<b$ și se înseamnă*

$$A=\frac{a+b}{2},\quad G=\sqrt{ab},\quad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

Să se stabilească inegalitățile

$$A>G>H;\quad A-G>G-H;$$
$$A-G<\frac{(b-a)^2}{8a};\quad A-H<\frac{(b-a)^2}{4a}.$$

Soluție. Calculăm diferențele

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2},$$

$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b-2\sqrt{ab})\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Ambele diferențe sînt pozitive, adică

$$A - G > 0, \quad G - H > 0, \quad \text{deci } A > G > H.$$

De fapt, una din aceste două inegalități este o consecință a celeilalte; într-adevăr, avem $AH = G^2$ și deci $\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$. Din $A > G$ deducem $\frac{A}{G} > 1$, deci $\frac{A}{H} > 1$ sau $G > H$ și invers, din $G > H$ deducem $\frac{G}{H} > 1$, deci $\frac{A}{G} > 1$ sau $A > G$.

Condiția necesară și suficientă pentru egalitățile $A = G = H$ este $a = b$.

Fiind date două numere pozitive a, b, A se numește *media aritmetică*, G se numește *media geometrică*, iar H *media armonică* a numerelor a, b. Ineaglitățile

$$A \geqslant G \geqslant H$$

arată că media aritmetică a două numere este mai mare ca media lor geometrică, care la rîndul ei este mai mare ca media lor armonică, egalitatea avînd loc numai în cazul $a = b$

O altă demonstrație este următoarea : din expresiile celor trei medii deducem

$$a + b = 2A, \quad ab = G^2$$

și

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{H}, \quad \frac{1}{ab} = \frac{1}{G^2},$$

deci a și b sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 - 2Ax + G^2 = 0,$$

iar $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ sînt rădăcinile ecuației

$$y^2 - \frac{2y}{H} + \frac{1}{G^2} = 0.$$

Însă numerele a, b, $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ sînt numere reale, deci discriminanții celor două ecuații sînt pozitivi sau nuli, adică

$$A^2 - G^2 \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \frac{1}{H^2} - \frac{1}{G^2} \geqslant 0$$

sau

$$(A - G)(A + G) \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \frac{(G - H)(G + H)}{H^2 G^2} \geqslant 0.$$

Cum A, G, H sînt numere pozitive, deducem

$$A - G \geqslant 0 \quad \text{și} \quad G - H \geqslant 0$$

sau în fine

$$A \geqslant G \geqslant H,$$

egalitatea avînd loc cînd discriminanții sînt nuli, adică rădăcinile egale, $a = b$ și $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$, adică $a = b$. Urmează că dacă numerele pozitive a și b sînt diferite, avem

$$A > G > H.$$

Pornim acum de la numerele pozitive A și H; după propoziția demonstrată mai sus, avem, între cele trei medii, inegalitățile

$$\frac{A+H}{2} > \sqrt{AH} > \frac{2AH}{A+H}.$$

Dar $\sqrt{AH} = \sqrt{ab} = G$, deci

$$\frac{A+H}{2} > G > \frac{2AH}{A+H}$$

și dacă reținem numai prima inegalitate,

$$A + H > 2G \text{ sau } A - G > G - H.$$

Pentru a determina o limită superioară a diferenței $A - G$, pornim de la egalitatea

$$(A - G)(A + G) = A^2 - G^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(b-a)^2}{4},$$

$$A - G = \frac{(b-a)^2}{4(A+G)} < \frac{(b-a)^2}{8a}$$

pentru că

$$4(A + G) > 4(G + G) = 8G = 8\sqrt{ab} > 8\sqrt{a \times a} = 8a.$$

Să determinăm o limită superioară a diferenței $A - H$; avem

$$A - H = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(b-a)^2}{2(a+b)} < \frac{(b-a)^2}{4a},$$

pentru că numitorul $2(a + b) > 2(a + a) = 4a$.

De fapt, ultima inegalitate este o consecință a inegalității precedente : într-adevăr,

$$A - H = (A - G) + (G - H).$$

Dar am arătat că $G - H < A - G$, deci

$$A - H < 2(A - G) < \frac{2(b-a)^2}{8a} = \frac{(b-a)^2}{4a}.$$

O aplicație importantă a acestor inegalități se întîlnește în problema determinării greutății unui corp prin metoda dublei cîntăriri.

Dacă se înseamnă cu x greutatea necunoscută a corpului, prin l și l' lungimile brațelor, prin a și b greutățile obținute în cele două cîntăriri, se obțin ecuațiile

$$la = l'x \text{ și } l'b = lx.$$

Prin înmulțirea ecuațiilor membru cu membru se găsește

$$x^2 = ab, \quad \text{deci } x = \sqrt{ab},$$

adică greutatea necunoscută x este egală cu media geometrică a greutăților obținute a și b.

Dacă, pentru ușurința calculelor, se ia ca valoare a lui x media aritmetică $\frac{a+b}{2}$ în locul mediei geometrice $\sqrt{ab}$, se comite o eroare prin adaos, pentru că $A > G$, iar eroarea comisă este egală cu $A - G$, care este mai mică decît

$$\frac{(b-a)^2}{8a}.$$

Această limită superioară a eroarei comise este cu atît mai mică cu cît greutățile a și b sînt mai mari și cu cît diferența lor este mai mică.

De exemplu, dacă $a = 3{,}145$ g, $b = 3{,}151$ g, media aritmetică $\frac{a+b}{2} = 3{,}148$ g, iar eroarea este mai mică decît

$$\frac{(b-a)^2}{8a} = \frac{(0{,}006)^2}{8 \times 3{,}145} g = \frac{36}{25{,}160} \text{g},$$

adică aproximativ o miime dintr-un miligram.

III.12. *Printr-un raționament sumar și cu datele numerice culese din observații proprii, să se calculeze:*

1. *Greutatea aerului dintr-o sală de clasă* ($\gamma_{aer} = 0{,}001293 g/cm^3$).

2. *Aria orașului București.*

Soluție. 1. Sala de clasă este, după apreciere, lungă de 18 m, lată de 10 m și înaltă de 5 m; volumul este deci aproximativ egal cu $18 \times 10 \times 5\ m^3 = 900\ m^3$. Densitatea aerului este egală cu 0,001 29 3, adică $1\ cm^3$ de aer cîntărește 0,001 293 g, urmează că $1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$ cîntărește 1,293 g, iar $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$ cîntărește 1,293 kg.

Greutatea aerului din clasă este deci, abstracție făcînd de spațiul ocupat de bănci și elevi, egal cu $(900\ m^3) \times (1{,}293\ kg/m^3) = 1\,163{,}7$ kg sau aproximativ 1 tonă.

2. Centrul orașului București este Piața „Anul 1848", iar din centru pînă la aeroportul Băneasa este o distanță de aproximativ 8 km. Dacă presupunem, cu aproximație, că orașul București are forma circulară, aria lui este egală cu aria unui cerc cu raza de 8 km, adică $3{,}14 \times 8^2 = 200{,}96\ km^2$ sau aproximativ $200\ km^2$.

III.13. *Valoarea accelerației gravitaționale g este, la suprafața unei planete, direct proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu pătratul razei ei.*

La suprafața Pămîntului, $g = 980\ cm/s^2$; *masa Lunei este egală cu* $\frac{1}{80}$ *din masa Pămîntului, iar raza Lunei, egală cu* $\frac{3}{11}$ *din raza Pămîntului.*

Să se calculeze valoarea lui g la suprafața Lunei.

Soluție. Fie M masa și R raza Pămîntului, iar m și r masa și raza Lunei. După legea atracției universale a lui *Newton* avem

$$g = \frac{kM}{R^2},$$

unde k este o constantă universală. Dacă însemnăm cu g' valoarea lui g la suprafața Lunei, avem

$$g' = \frac{kM}{r^2}.$$

Însă $m = \frac{M}{80}$, $r = \frac{3R}{11}$, deci

$$g' = \frac{k\frac{M}{80}}{\left(\frac{3R}{11}\right)^2} = \frac{\frac{121}{720}kM}{R^2},$$

$$g' = \frac{121g}{720} = 121 \times \frac{980}{720} = 165 \text{ cm/s}^2.$$

III.14. *În cîți ani se triplează un capital depus cu dobîndă simplă de 6 % pe an? Dar dacă dobînda de 6 % pe an este compusă?*

Soluție. Capitalul C, depus cu procentul P, timp de T ani, produce dobînda simplă D și aceste patru mărimi sînt legate prin relația

$$D = \frac{C \times T \times P}{100}.$$

Prin ipoteză, capitalul se triplează, prin urmare capitalul inițial C plus dobînda D fac împreună capitalul final, egal cu $3C$, adică $C + D = 3C$, deci $D = 2C$. Înlocuind P cu 6, din formulă deducem

$$2C = \frac{C \times T \times 6}{100}, \quad T = \frac{200}{6} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ ani}$$

sau $T = 33$ ani și 4 luni.

Presupunem în al doilea rînd că depunem capitalul C cu dobîndă *compusă*, timp de n ani, cu procentul de $r = \frac{6}{100} =$ $= 0{,}06$ lei. După 1 an, 1 leu devine $(1 + r)$, iar capitalul C devine $C(1 + r)$, iar după n ani, capitalul final C' este

$$C' = C(1 + r)^n.$$

Prin ipoteză, capitalul final C' este egal cu de trei ori capitalul inițial C, adică $C' = 3C$. Înlocuind în formulă $r = 0{,}06$, deducem

$$3C = C\,(1 + 0{,}06)^n, \quad 3 = 1{,}06^n,$$

$$\lg 3 = n \lg 1{,}06, \quad n = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}06} = \frac{0{,}477\,12}{0{,}025\,31}.$$

$$n = \frac{47\,712}{2\,531}\ ;\ \lg n = \lg 47\,712 - \lg 2\,531 = 4{,}678\,61 - 3{,}403\,29,$$

$$\lg n = 1{,}275\,32\ ;\ n = 18{,}85 \text{ ani}$$

adică n este egal cu aproximativ 18 ani, 10 luni și 6 zile, pentru că

$$0{,}85 \text{ ani} = \frac{85}{100} \text{ ani} = \frac{85 \times 12}{100} \text{ luni} = \frac{3 \times 17}{5} \text{ luni} =$$

$$= \frac{51}{5} \text{ luni} = 10 \text{ luni} + \frac{1}{5} \text{luni} = 10 \text{ luni} +$$

$$+ \frac{30}{5} \text{zile} = 10 \text{ luni} + 6 \text{ zile}.$$

III. 15. *Să se verifice că ecuația*

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

are o rădăcină egală cu zero și alta egală cu $a + b$; *să se calculeze a treia rădăcină.*

Soluție. Pentru $x = 0$, ecuația devine

$$\frac{-a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{b}{-a} + \frac{a}{-b},$$

sau schimbînd semnele, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, egalitate evidentă, deci $x = 0$ este rădăcină a ecuației.

Pentru $x = a + b$, ecuația devine

$$\frac{a+b-a}{b} + \frac{a+b-b}{a} = \frac{b}{a+b-a} + \frac{a}{a+b-b}$$

sau $\frac{b}{b} + \frac{a}{a} = \frac{b}{b} + \frac{a}{a}$ sau $1 + 1 = 1 + 1$, egalitate evidentă, deci și $x = a + b$ este rădăcină a ecuației.

Pentru a găsi a treia rădăcină, aducem fracțiile la același numitor și ecuația devine

$$\frac{a(x-a) + b(x-b)}{ab} = \frac{b(x-b) + a(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

Am obținut două fracții care au numărătorii egali, dînd numărătorul comun în factor, ecuația se mai scrie

$$a(x-a) + b(x-b)\left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{(x-a)(x-b)}\right] = 0.$$

Pentru ca un produs de doi factori să fie nul, trebuie ca unul din factori să fie nul, avem deci ecuaţiile

$$a(x-a)+b(x-b)=0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{ab}-\frac{1}{(x-a)(x-b)}=0.$$

A doua ecuaţie se mai scrie

$$\frac{(x-a)(x-b)-ab}{ab(x-a)(x-b)}=0$$

sau $x^2-(a+b)x=0$ şi regăsim rădăcinile $x=0$ şi $x=a+b$.

Prima ecuaţie se scrie $ax-a^2+bx-b^2=0$, de unde deducem $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$; aceasta este a treia rădăcină a ecuaţiei date.

III.16. *Să se verifice că ecuaţia*

$$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}$$

are o rădăcină egală cu zero.

Care este condiţia ca ecuaţia să aibă două rădăcini egale? Să se rezolve ecuaţia în acest caz particular.

Soluţie. Pentru $x=0$ ecuaţia devine $\frac{a}{a}+\frac{b}{b}=\frac{c}{c}+\frac{d}{d}$ sau $1+1=1+1$, egalitate evidentă, deci $x=0$ este rădăcină a ecuaţiei.

Aducînd la acelaşi numitor în ambele părţi, ecuaţia devine

$$\frac{(a+b)x+2ab}{x^2+(a+b)x+ab}=\frac{(c+d)x+2cd}{x^2+(c+d)x+cd}$$

şi aplicînd o proprietate a proporţiilor, aceste rapoarte sînt egale cu diferenţa numărătorilor supra diferenţa numitorilor, adică cu

$$\frac{(a+b-c-d)x+2(ab-cd)}{(a+b-c-d)x+ab-cd}.$$

Dacă egalăm primul raport cu al treilea raport şi grupăm termenii după puterile descrescătoare ale lui x, avem

$$(a+b-c-d)x^3+2(ab-cd)x^2+[ab(c+d)-cd(a+b)]x=0$$

şi această ecuaţie de gradul al treilea are rădăcina evidentă $x=0$ pentru că termenul constant este nul.

Condiția ca ecuația să aibă *două* rădăcini egale cu zero este ca și coeficientul lui x să fie nul, adică

$$ab(c+d) - cd(a+b) = 0$$

sau împărțind cu *abcd*,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

În acest caz a treia rădăcină este

$$x_3 = \frac{2(ab - cd)}{a + b - c - d}.$$

Însă din relația $\frac{ab}{a+b} = \frac{cd}{c+d}$ deducem că aceste rapoarte sînt egale cu $\frac{ab - cd}{a + b - c - d}$, deci

$$x_3 = -\frac{2ab}{a+b}.$$

În rezumat, condiția ca ecuația dată să aibă două rădăcini egale cu zero este $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, iar a treia rădăcină este

$$x_3 = \frac{-2ab}{a+b}.$$

Dacă nici unul din numerele a, b, c, d nu este nul, ecuația nu poate avea toate trei rădăcinile egale cu zero; într-adevăr să presupunem contrariul și fie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deducem că coeficienții termenilor în x și x^2 sînt nuli, adică

$$ab(c+d) = cd(a+b) \text{ și } ab = cd$$

și din aceste două condiții deducem, pentru că ab și cd sînt diferiți de zero, $c + d = a + b$, adică și coeficientul lui x^3 este nul, ecuația se reduce la o identitate.

Să presupunem în al doilea rînd că ecuația noastră are pe lîngă rădăcina $x = 0$, celelalte două rădăcini egale între ele; ele sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$(a + b - c - d)x^2 + 2(ab - cd)x + ab(c+d) - cd(a+b) = 0$$

și această ecuație are rădăcinile egale cînd discriminantul ei este nul adică

$$D = (ab - cd)^2 - (a + b - c - d)\{ab(c + d) - cd(a + b)\} = 0.$$

În acest caz, cele două rădăcini egale au valoarea

$$x_2 = x_3 = \frac{-(ab - cd)}{a + b - c - d}.$$

Discriminantul D este nul în particular cînd unul din numerele a sau b este egal cu unul din numerele c sau d; într-adevăr, fie de exemplu $b = c$, deducem

$$D = (ab - bd)^2 - (a + b - b - d)\{ab(b + d) - bd(a + b)\} =$$
$$= (a - d)^2b^2 - (a - d)(ab^2 - b^2d) = 0.$$

În acest caz, rădăcinile egale sînt

$$x_2 = x_3 = \frac{-(ab - bd)}{a + b - b - d} = -b.$$

III.17. *Să se arate că* $b^2 - 4ac$ *este un pătrat perfect dacă* $a + 2b + 4c = 0$ *sau* $9a + 3b + c = 0$.

Soluție. Din prima relație deducem $-4c = a + 2b$, deci

$$b^2 - 4ac = b^2 + a(a + 2b) = (a + b)^2.$$

Din a doua relație deducem $-c = 9a + 3b$, deci

$$b^2 - 4ac = b^2 + 4a(9a + 3b) = (6a + b)^2.$$

În general, dacă cei trei coeficienți a, b, c sînt legați prin relația $ar^2 + br + c = 0$, deducem

$$b^2 - 4ac = b^2 + 4a(ar^2 + br) = (2ar + b)^2.$$

Cazurile particulare din enunț corespund respectiv la $r = \frac{1}{2}$ și $r = 3$.

III.18. *Să se discute rădăcinile ecuației*

$$px^2 - (2 - 2p)x + p - 4 = 0$$

cînd parametrul p *variază de la* $-\infty$ *la* $+\infty$.

Soluție. Dacă împărțim ecuația cu p, presupus diferit de zero, obținem

$$x^2 - 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)x + 1 - \frac{4}{p} = 0$$

și dacă notăm cu S și P suma și produsul rădăcinilor, avem

$$S = 2\left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad P = 1 - \frac{4}{p}.$$

Discriminantul ecuației este $D = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 - 1 + \frac{4}{p} = \frac{2p+1}{p^2}$.

Avem

$D < 0$ pentru $p < -\frac{1}{2}$, rădăcinile x_1 și x_2 sînt imaginare;

$D = 0$ pentru $p = -\frac{1}{2}$, rădăcinile sînt reale și egale $x_1 = x_2 = 3$;

$D > 0$ pentru $p > -\frac{1}{2}$, rădăcinile sînt reale și diferite, $x_1 < x_2$.

Mai putem scrie $\frac{p^2 S}{2} = p(p-1)$ și $p^2 P = p(p-4)$, deci $S < 0$ pentru $0 < p < 1$ și $P < 0$ pentru $0 < p < 4$; $S > 0$ pentru $p < 0$ și $1 < p$, iar $P > 0$ pentru $p < 0$ și $4 < p$. Cînd parametrul p crește de la $-\frac{1}{2}$ la $+\infty$, obținem:

$-\frac{1}{2} < p < 0$; $S > 0$, $P > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$;

$0 < p < 1$; $S < 0$, $P < 0$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $|x_1| > x_2$;

$1 < p < 4$; $S > 0$, $P < 0$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; $x_2 > |x_1|$;

$4 < p < \infty$; $S > 0$, $P > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

A mai rămas să studiem cazurile $p = 0$ sau $p = 1$ sau $p = 4$. Pentru $p = 0$, ecuația dată se reduce la gradul întîi, $2x - 4 = 0$, deci o rădăcină este infinită și cealaltă egală cu 2. Pentru $p = 1$, $S = 0$ deci $x_1 + x_2 = 0$, adică rădăcinile sînt egale și de semne contrarii. Pentru $p = 4$, $P = 0$, o rădăcină este nulă, iar cealaltă egală cu $\frac{3}{2}$.

III.19. *Polinomul* $(x+y)^3 - x^3 - y^3$ *este divizibil cu* $3xy(x+y)$; *dar dacă se înlocuiește peste tot numărul* 3 *printr-un alt număr întreg și pozitiv?*

Soluție. Avem identitatea $(x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y)$, deci primul polinom se divide cu al doilea și cîtul este egal cu unitatea.

O condiție *necesară* ca polinomul $A_n(x) = (x+y)^n - x^n - y^n$ să fie divizibil cu $nxy(x+y)$ este ca exponentul n să fie un număr impar; într-adevăr, $A_n(0) = 0$, deci polinomul se împarte cu x, fie că n este par sau impar, însă $A_n(-y) = -(-y)^n - y^n$ și dacă n este par $A_n(-y) = -2y^n \neq 0$, iar dacă n este impar, $A_n(-y) = 0$.

O condiție *suficientă* ca polinomul $A_n(x)$ să fie divizibil cu $nxy(x+y)$ este ca exponentul n să fie un număr prim impar; într-adevăr, numărul n fiind impar, am văzut că $A_n(x)$ este divizibil cu x(deci și cu y, pentru motive de simetrie) și cu $x+y$. Dacă n este un număr prim și a un număr întreg oarecare, teorema lui *Fermat* spune că $a^n = a +$ multiplu de n, ceea ce convine să se scrie prescurtat

$$a^n \equiv a \pmod{n},$$

care exprimă că diferența $(a^n - a)$ este divizibilă cu n. Urmează că

$$(x+y)^n \equiv x+y,\ x^n \equiv x,\ y^n \equiv y \pmod{n}$$

$$A_n(x) \equiv x+y-x-y = 0 \pmod{n}.$$

adică $A_n(x)$ este divizibil și cu exponentul n. Numărul $A_n(x)$ fiind divizibil cu numerele prime între ele x, y, $x+y$, n, este divizibil și cu produsul lor $nxy(x+y)$.

Pentru $n = 5$ și $n = 7$, această identitate devine respectiv

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2),$$

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Exponentul n fiind presupus prim impar, *Cauchy* a demonstrat că polinomul $A_n(x)$ este divizibil nu numai cu produsul $nxy(x+y)$ ci și cu trinomul (x^2+xy+y^2), iar cînd n este de forma $n = 1 +$ multiplu de 6, de exemplu $n = 7$, $n = 13$, $n = 19$, $n = 31$,. . ., polinomul este divizibil cu pătratul acestui trinom, adică cu $(x^2+xy+y^2)^2$, ceea ce se vede direct pe identitățile de mai sus, corespunzătoare lui $n = 5$ și $n = 7$.

III.20. *Să se determine valorile parametrului k pentru care rădăcinile a și b ale ecuației*

$$(k-3)x^2 - 2(k-6)x + k = 0$$

sînt legate prin relația

$$a^2 + b^2 - 5(a + b) - 1 = 0.$$

Rădăcinile a și b sînt reale sau imaginare?

Soluție. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți sînt

$$a + b = \frac{2(k-6)}{k-3}, \quad ab = \frac{k}{k-3}.$$

Însă $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, iar relația dată devine

$$\frac{4(k-6)^2}{(k-3)^2} - \frac{2k}{k-3} - \frac{10(k-6)}{k-3} - 1 = 0$$

sau

$$4(k-6)^2 - 2k(k-3) - 10(k-6)(k-3) - (k-3)^2 = 0,$$

sau

$$-9k^2 + 54k - 45 = 0 \quad \text{sau} \quad k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Ultima ecuație are rădăcinile $k_1 = 1$, $k_2 = 5$.

Discriminantul ecuației date este

$$D = (k-6)^2 - k(k-3) = 36 - 9k = 9(4 - k)$$

de unde urmează discuția:

$D > 0$ cînd $k < 4$, rădăcinile x_1 și x_2 sînt reale;

$D = 0$ cînd $k = 4$, rădăcinile $x_1 = x_2 = -2$;

$D < 0$ cînd $k > 4$, rădăcinile x_1 și x_2 sînt imaginare.

În particular, pentru $k = 1$, rădăcinile a și b sînt reale, iar pentru $k = 5$, imaginare.

III.21. *Rezistența electrică a unui fir de cupru, de secțiune circulară, este direct proporțională cu lungimea lui și invers proporțională cu pătratul diametrului.*

Două fire de cupru au rezistențele electrice egale, iar raportul lungimilor lor egal cu 2; să se calculeze raportul greutăților lor.

Soluție. Firul f are lungimea l și diametrul d; rezistența lui electrică este $\frac{kl}{d^2}$, unde k este un coeficient de proporționalitate, iar greutatea firului este

$$g = \frac{\pi d^2 l \delta}{4},$$

unde δ este densitatea cuprului.

Pentru firul F, de lungime L şi diametru D, rezistenţa electrică este $\frac{kL}{D^2}$, iar greutatea lui este

$$G = \frac{\pi D^2 L \delta}{4}.$$

Prin ipoteză, rezistenţele electrice sînt egale, deci

$$\frac{kl}{d^2} = \frac{kL}{D^2} \quad \text{sau} \quad \frac{L}{l} = \left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

Raportul $\frac{G}{g} = \frac{D^2 L}{d^2 l}$ se mai scrie, dacă ţinem seama de ultima egalitate,

$$\frac{G}{g} = \left(\frac{L}{l}\right)^2.$$

Însă prin ipoteză $\frac{L}{l} = 2$, deci $\frac{G}{g} = 4$.

III.22. *Pentru ce valori ale parametrului k, ecuaţia*

$$f(x) = (k - 15)\,x^2 - 4kx + k - 6 = 0$$

are o rădăcină sau ambele rădăcini mai mari ca numărul 2?

Soluţie. Ecuaţia are o singură rădăcină mai mare ca 2, dacă numărul 2 este cuprins între cele două rădăcini ale ecuaţiei. Din studiul semnului trinomului de gradul al doilea se ştie că pentru valorile lui x cuprinse între rădăcini, trinomul are semnul contrar semnului coeficientului lui x^2, deci dacă 2 este cuprins între rădăcini, trebuie să avem

$$(k - 15)\,f(2) < 0 \quad \text{sau} \quad -(k - 15)\,(k + 22) < 0,$$
$$(k - 15)\,(k + 22) > 0 \quad \text{deci} \quad k < -22 \quad \text{sau} \quad 15 < k.$$

Ecuaţia are ambele rădăcini mai mari ca 2 dacă, mai întîi, cele două rădăcini există, adică sînt reale, deci discriminantul ecuaţiei este pozitiv, adică

$$4k^2 - (k - 15)\,(k - 6) > 0 \quad \text{sau} \quad 3\,(k + 10)\,(k - 3) > 0.$$

În al doilea rînd, numărul 2 fiind exterior intervalului determinat de rădăcini, $f(2)$ are semnul lui $k - 15$, adică

$$(k - 15)\,f(2) > 0 \quad \text{sau} \quad -(k - 15)\,(k + 22) > 0.$$

În al treilea rînd, numărul 2 fiind mai mic decît ambele rădăcini, este mai mic decît semisuma rădăcinilor, adică

$$2 < \frac{2k}{k-15}.$$

Prima condiție este îndeplinită dacă parametrul

$$k < -10 \text{ sau } 3 < k.$$

A doua condiție este îndeplinită cînd

$$-22 < k < 15.$$

A treia condiție este îndeplinită cînd

$$k > 15.$$

Aceste trei condiții nu pot fi îndeplinite simultan pentru că condiția a doua $k < 15$ și condiția a treia $k > 15$ sînt incompatibile.

Rezultă că ecuația dată nu poate avea ambele rădăcini mai mari ca numărul 2 pentru nici o valoare a parametrului k.

III.23. *Să se determine, pe cercul de diametru $AB = 2R$, punctul P așa fel ca $AQ + QP = a$, unde Q este proiecția punctului P pe AB, iar a o lungime dată și să se discute numărul soluțiilor.*

Soluție. Însemnăm $AQ = x$; în triunghiul dreptunghi APB, înălțimea QP este medie proporțională între proiecțiile catetelor pe ipotenuză, deci

$$QP^2 = AQ \times QP \quad \text{sau} \quad QP^2 = x(2R - x),$$

iar ecuația problemei este

$$\sqrt{x(2R - x)} = a - x.$$

Partea întîia în această ecuație fiind pozitivă, trebuie să avem $a - x > 0$ sau $x < a$. Prin ridicare la pătrat și gruparea termenilor, ecuația este echivalentă cu sistemul

$$f(x) = 2x^2 - 2(a + R)x + a^2 = 0, \quad x < a.$$

Din studiul semnului trinomului rezultă că problema admite o soluție unică dacă $f(a) < 0$, adică

$$a^2 - 2aR < 0 \quad \text{sau} \quad a < 2R.$$

Problema admite două soluții dacă discriminantul

$$(a + R)^2 - 2a^2 \geqslant 0$$

și în plus $f(a) > 0$ și $a > \frac{a+r}{2}$ = semisuma rădăcinilor.

Discriminantul $-a^2 + 2aR + R^2 \geqslant 0$ pentru

$$R(1 - \sqrt{2}) \leqslant a \leqslant R(1 + \sqrt{2}).$$

Condiția $f(a) = a(a - 2R) > 0$ este îndeplinită pentru $2R < a$, iar a treia condiție $a > \frac{a+R}{2}$ pentru $R < a$.

Aceste trei condiții sînt simultan îndeplinite dacă

$$2R < a < R(1 + \sqrt{2}).$$

În rezumat, problema admite o singură soluție dacă

$$0 < a < 2R$$

și două soluții dacă

$$2R < a < R(1 + \sqrt{2}).$$

Aceste rezultate pot fi obținute și pe cale geometrică : luăm pe diametrul AB, sau pe prelungirea lui, punctul N definit prin condiția $AN = a$ (fig. 40); prin N ducem dreapta NP așa fel ca $\sphericalangle ANP = 45°$, fie P punctul ei de intersecție cu semicercul de diametru AB și fie Q proiecția lui P pe AB. În triunghiul dreptunghi și isoscel NQP avem $QN = QP$, deci

$$AQ + QP = AQ + QN = AN = a.$$

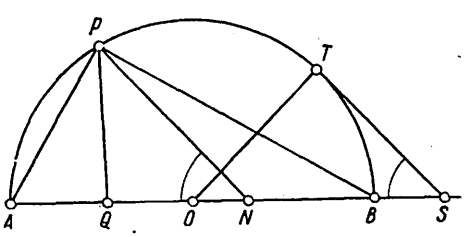


Fig. 40

Urmează că problema admite una sau două soluții după cum dreapta NP taie semicercul într-unul sau două puncte.

Luăm pe prelungirea lui AB punctul S definit prin condiția $AS = R + R\sqrt{2}$; tangenta dusă din S la semicerc atinge cercul în punctul T, fie O centrul semicercului; triunghiul OTS este dreptunghi în T, are cateta $OT = R$, ipotenuza $OS = R\sqrt{2}$,

deci $ST = R$; rezultă că triunghiul OTS este isoscel, deci $\sphericalangle OST = 45°$.

Dacă $AN < AB$ sau $a < 2R$, dreapta NP taie semicercul într-un singur punct, deci problema are o singură soluție $0 < x < R$.

Dacă $AN = AB$ sau $a = 2R$, avem două soluții $x = R$ și $x = 2R$.

Dacă $AB < AN < AS$ sau $2R < a < R(1 + \sqrt{2})$, avem două soluții $R < x_1 < x_2 < 2R$.

Dacă $AN = AS$ sau $a = R(1 + \sqrt{2})$, avem două soluții confundate $x_1 = x_2 = R + R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dacă $AN > AS$ sau $a > R(1 + \sqrt{2})$, dreapta AP nu mai întîlnește semicercul, deci problema nu admite nici o soluție.

III.24. 1. *Dacă o rădăcină a ecuației*

$$x^2 + ax + b = 0$$

este egală cu pătratul celeilalte rădăcini, să se arate că

$$a^3 + b^2 = (3a - 1)\,b. \qquad (1)$$

Să se verifice rezultatul obținut pe un exemplu numeric.

2. *Dar dacă o rădăcină este egală cu cubul celeilalte rădăcini?*

Soluție. 1. Fie x și y rădăcinile ecuației date; relațiile dintre coeficienți și rădăcini sînt

$$x + y = -a,\ xy = b.$$

Însă prin ipoteză $y = x^2$, deci

$$x + x^2 = -a,\ x^3 = b,$$

de unde deducem

$$x^2 + x + a = 0,\ x^2 + ax + b = 0,$$

și problema s-a redus la eliminarea lui x între ultimele două ecuații.

Scădem ultimele două ecuații membru cu membru și deducem

$$(a - 1)x + b - a = 0.$$

Distingem două cazuri după cum a este egal sau diferit de 1; dacă $a = 1$, deducem $b - a = 0$, adică $b = 1$ și pentru

aceste valori numerice ale parametrilor a şi b, relaţia (1) este verificată.

Dacă a este diferit de 1, din ultima ecuaţie deducem

$$x = \frac{b-a}{1-a},$$

care introdusă în ecuaţia $x^2 + x + a = 0$, conduce, după simplificări, la relaţia (1).

De exemplu, dacă $x = -2$, $y = 4$, avem $x + y = 2$, $xy = -8$, deci $a = -2$, $b = -8$,

$$a^3 + b^2 = -8 + 64 = 56\,;\ (3a - 1)b = (-6-1)(-8) = 56,$$

şi relaţia (1) este verificată.

2. Dacă o rădăcină y este egală cu cubul celeilalte rădăcini x, adică $y = x^3$, relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini se scriu

$$x + x^3 = -a,\ x^4 = b,$$

de unde deducem

$$x^3 + x + a = 0,\ x^2 + ax + b = 0.$$

Înmulţind prima ecuaţie cu -1, a doua cu x şi apoi adunându-le membru cu membru, deducem sistemul echivalent

$$ax^2 + (b-1)x - a = 0,\ x^2 + ax + b = 0$$

şi dacă eliminăm pe x între aceste două ecuaţii, obţinem

$$a^4 - b^3 = (4a^2 - 2b + 1)\,b. \qquad (2)$$

Aceasta este relaţia de legătură dintre coeficienţii a şi b ai ecuaţiei $x^2 + ax + b = 0$, în ipoteza că o rădăcină este egală cu cubul celeilalte rădăcini.

De exemplu, dacă $x = 2$, $y = 8$, avem $x + y = 10$, $xy = 16$, deci $a = -10$, $b = 16$,

$$a^4 - b^2 = 10\,000 - 4\,096 = 5\,904\,;\ (4a^2 - 2b + 1)\,b = (400 - 32 + 1)16 = 5\,904,$$

şi relaţia (2) este verificată.

III.25. *Se consideră diferenţa*

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{kx\,(x-2)}{x^2 - 1}.$$

1. *Să se descompună numitorii în factori și să se determine cel mai mic multiplu comun al lor.*

2. *Să se aducă fracțiile la același numitor și să se ordoneze numărătorul după puterile descrescătoare ale lui x.*

3. *Să se determine valoarea lui k astfel ca polinomul de la numărător să admită rădăcina n = −2 și să se găsească toate rădăcinile polinomului obținut după ce s-a înlocuit k cu valoarea calculată.*

4. *Nu se putea simplifica problema de la început, utilizînd o cale mai ușoară?*

Soluție. 1. Numitorii fracțiilor se scriu

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \text{și} \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

Însă cel mai mic comun multiplu a două sau mai multe numere se află înmulțind între ei factorii primi, comuni și necomuni, la puterea cea mai mare; urmează că c.m.m.c. al numitorilor este

$$(x+1)(x-1)^2.$$

2. Pentru a aduce fracțiile la același numitor, amplificăm prima fracție cu $(x+1)$, a doua cu $(x-1)$ și avem

$$\frac{(x^2-3x+2)(x+1) - kx(x-2)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Făcînd înmulțirile, reducerile și ordonînd termenii, polinomul $P(x)$ de la numărător este

$$P(x) = (1-k)x^3 + (3k-2)x^2 - (2k+1)x + 2.$$

3. Dacă polinomul $P(x)$ are rădăcina -2, avem $P(-2) = 0$, de unde deducem, dacă reducem termenii asemenea, $24k - 12 = 0$, deci

$$k = \frac{1}{2},$$

iar expresia lui $P(x)$ devine

$$P(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2},$$

însă $P(-2) = 0$, deci polinomul se împarte exact cu $(x+2)$, iar cîtul este $x^2 - 3x + 2$, care are rădăcinile 1 și 2, deci

$$P(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{2}.$$

4. Numărătorul primei fracții are rădăcinile 1 și 2, deci prima fracție se scrie, după simplificarea cu factorul $x-1$,

$$\frac{x-2}{x-1},$$

iar diferența dată devine

$$\left[\frac{x-2}{x-1}\right]\left[1-\frac{kx}{x+1}\right].$$

Cum prima paranteză nu se anulează pentru $x=-2$, trebuie ca a doua paranteză, adică $\left[1-\frac{kx}{x+1}\right]$ să se anuleze pentru $x=-2$, de unde deducem condiția

$$1-\frac{k(-2)}{-2+1}=0 \quad \text{sau} \quad k=\frac{1}{2}.$$

III.26. *Într-o serie de hidrocarburi, atomii de carbon se grupează în moleculele M_1, M_2, M_3, ... în felul următor:*

Se cere să se calculeze

1. *Numărul atomilor de carbon în molecula M_n de indice n.*
2. *Numărul atomilor de carbon în primele n molecule.*

Soluție. 1. Observăm că pe linia verticală mediană, numărul atomilor, în fiecare moleculă, este egal cu numărul de ordine al moleculei, adică 1 în M_1, 2 în M_2, 3 în M_3, ..., 7 în M_7, ..., deci n în M_n.

Observăm mai departe că pe diferitele linii orizontale avem respectiv 1,3,5,7,... atomi și că la fiecare moleculă, începînd de la o anumită linie orizontală, aceste linii orizontale se reproduc în sens invers, adică ele au respectiv ...7, 5, 3, 1 atomi

Dacă n este un număr par, de exemplu $n=6$, numărul atomilor în M_6 este egal cu dublul sumei primelor trei numere impare, adică $2\times(1+3+5)=18$, iar dacă $n=2p$, numărul atomilor în M_n este egal cu dublul sumei primelor p numere impare, adică $2\times\{1+3+5+\ldots+(2p-1)\}$.

În paranteză avem o progresie aritmetică, primul termen egal cu 1, raţia egală cu 2, numărul termenilor egal cu p, deci suma ei este egală cu

$$[1 + (2p - 1)]\frac{p}{2} = p^2$$

iar numărul atomilor în M_n este

$$2p^2 = \frac{n^2}{2}\cdot$$

Să comparăm moleculele M_6 şi M_7; molecula M_7 are în plus, faţă de M_6, linia mediană orizontală pe care se găsesc 7 atomi (7 = numărul de ordine al moleculei M_7), deci M_7 are 7 atomi plus numărul atomilor din M_6, adică $7 + 18 = 25$ atomi.

Dacă n este un număr impar, $n = 2p + 1$, comparăm moleculele de indice $2p$ şi $2p + 1$; a doua moleculă are în plus, faţă de prima, linia mediană orizontală pe care se găsesc $2p + 1$ atomi ($2p + 1$ = numărul de ordine al moleculei M_n). Însă am văzut mai sus că molecula de indice $2p$ are $2p^2$ atomi, deci molecula M_n de indice $n = 2p + 1$ are $(2p^2 + 2p + 1)$ atomi. Din $n = 2p + 1$ deducem $p = \frac{n-1}{2}$, $2p^2 = \frac{(n-1)^2}{2}$, $2p^2 + 2p + 1 = \frac{(n-1)^2}{2} + n = \frac{n^2+1}{2}$, deci molecula M_n, de indice n impar, are $\frac{n^2+1}{2}$ atomi.

În rezumat, molecula M_n are $\frac{n^2}{2}$ sau $\frac{n^2+1}{2}$ atomi, după cum n este un număr par sau impar.

Soluţia a doua. Însemnăm cu $f(2p)$ numărul atomilor în molecula M_n de indice $n = 2p$ şi comparăm moleculele M_2, M_4, M_6, ...; molecula M_4 are în plus, faţă de M_2, două linii orizontale de cîte 3 atomi, M_6 are în plus, faţă de M_4, două linii orizontale de cîte 5 atomi, şi aşa mai departe, molecula de indice $2p$ are în plus, faţă de molecula de indice $2(p - 1)$, două linii orizontale de cîte $(2p - 1)$ atomi. Aceste relaţii de legătură între numărul atomilor în moleculele M_2 M_4 M_6, ... se pot scrie

$$f(4) = f(2) + 2 \times 3, \quad f(6) = f(4) + 2 \times 5, \ldots$$
$$f(2p) = f(2p - 2) + 2(2p - 1).$$

Ultima relaţie se mai scrie, înlocuind p cu $(p + 1)$,

$$f(2p + 2) - f(2p) = 4p + 2. \qquad (1)$$

Funcţia necunoscută $f(2p)$ satisface ecuaţia (1), care se numeşte *ecuaţie cu diferenţe finite*; din punct de vedere elementar putem determina funcţia necunos-

cută $f(2p)$ prin metoda coeficienților nedeterminați și anume căutăm pentru $f(2p)$ un polinom de gradul al doilea în raport cu variabila p, adică

$$f(2p) = Ap^2 + Bp + C,$$

în care A, B, C sînt constante numerice care urmează să fie determinate. Deducem

$$f(2p+2) = A(p+1)^2 + B(p+1) + C = AP^2 + (B+2A)p + A + B + C;$$

înlocuim în ecuația (1), reducem termenii asemenea și obținem

$$2Ap + A + B \equiv 4p + 2.$$

Această egalitate trebuie să fie o identitate în raport cu variabila p, adică trebuie să fie adevărată oricare ar fi p; urmează că termenul constant $A+B$, din membrul întîi, este egal cu 2, termenul constant din membrul al doilea; la fel cu coeficientul lui p în membrul întîi, adică $2A$ este egal cu coeficientul lui p din membrul al doilea, adică 4; deducem două ecuații cu două necunoscute A și B, $A + B = 2$, $2A = 4$, deci $A = 2$, $B = 0$. Înlocuim și avem

$$f(2p) = Ap^2 + Bp + C = 2p^2 + C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Pentru $p = 1$ avem $f(2) = 2 + C$, $f(2) = 2$ pentru că molecula M_2 are 2 atomi, deci $2 = 2 + C$, adică $C = 0$, deci în definitiv

$$f(2p) = 2p^2.$$

Însemnăm cu $g(2p+1)$ numărul atomilor în molecula M_n de indice $n = 2p + 1$ și comparăm moleculele M_1, M_3, M_5, ...; molecula M_3 are în plus, față de molecula M_1 două linii orizontale, una cu 3 atomi, cealaltă cu 1 atom; molecula M_5 are în plus, față de M_3, două linii orizontale, una cu 5 atomi, cealaltă cu 3 atomi și așa mai departe, molecula de indice $2p + 1$ are în plus, față de molecula de indice $2p - 1$, două linii orizontale, una cu $2p + 1$ atomi, cealaltă cu $2p - 1$ atomi. Relațiile de legătură între numărul atomilor în moleculele M_1, M_3, M_5, ... se pot scrie

$$g(3) = g(1) + 3 + 1, g(5) = g(3) + 5 + 3, \ldots$$
$$g(2p+1) = g(2p-1) + 2p + 1 + 2p - 1.$$

Ultima ecuație (cu diferențe finite) se mai scrie

$$g(2p+1) - g(2p-1) = 4p. \qquad (2)$$

Căutăm o soluție de forma $g(2p+1) = Ap^2 + Bp + C$; deducem $g(2p-1) = A(p-1)^2 + B(p-1) + C$, iar ecuația (2) devine, după reducerea termenilor asemenea, $2Ap - A + B \equiv 4p$

Din această identitate rezultă

$$2A = 4, \quad -A + B = 0, \quad \text{deci } A = 2, \; B = 2.$$

Înlocuim și avem

$$g(2p+1) = Ap^2 + Bp + C = 2p^2 + 2p + C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Pentru $p = 0$ am $g(1) = C$, însă $g(1) = 1$ pentru că molecula M_1 are 1 atom, deci $C = 1$ și în definitiv,

$$g(2p+1) = 2p^2 + 2p + 1.$$

Am regăsit aceleași rezultate ca în prima metodă și anume, numărul atomilor în molecula M_n de indice n este egal cu

$$f(2p) = 2p^2 = \frac{n^2}{2}, \qquad \text{dacă } n = 2p,$$

sau

$$g(2p+1) = 2p^2 + 2p + 1 = \frac{n^2+1}{2}, \quad \text{dacă } n = 2p+1.$$

2. Fie $F(2p)$ numărul total al atomilor de carbon în moleculele $M_2, M_4, \ldots, M_{2p}$, adică

$$F(2p) = f(2) + f(4) + \ldots + f(2p)$$

și înlocuind p prin $(p-1)$,

$$F(2p-2) = f(2) + f(4) + \ldots + f(2p-2),$$

de unde prin scădere $F(2p) - F(2p-2) = f(2p)$.

Dar am văzut că $f(2p) = 2p^2$, deci funcția necunoscută $F(2p)$ satisface *ecuația cu diferențe finite*

$$F(2p) - F(2p-2) = 2p^2. \tag{3}$$

Determinăm $F(2p)$ prin metoda coeficienților nedeterminați, adică determinăm valorile numerice ale coeficienților A, B, C, D așa fel ca

$$F(2p) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D$$

să satisfacă identic ecuația (3). Deducem

$$F(2p-2) = A(p-1)^3 + B(p-1)^2 + C(p-1) + D$$

și ecuația (3) devine, după ce-am grupat termenii asemenea,

$$3Ap^2 + (-3A + 2B)\,p + A - B + C \equiv 2p^2.$$

Din această identitate deducem sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute $3A = 2$, $-3A + 2B = 0$, $A - B + C = 0$ obținute egalînd, în cei doi membri coeficienții diferitelor puteri ale lui p. Rezolvăm sistemul și avem

$A = \frac{2}{3}$, $B = 1$, $C = \frac{1}{3}$, deci

$$F(2p) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = \frac{2p^3}{3} + p^2 + \frac{p}{3} + D,$$

unde D este o constantă arbitrară; dar $F(2) = f(2) = 2$, deci făcînd

$p = 1$, obținem $2 = F(2) = \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3} + D$,

constanta $D = 0$ și funcția $F(2p)$ este

$$F(2p) = \frac{2p^3}{3} + p^2 + \frac{p}{3} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3}.$$

Aceasta este suma atomilor de carbon în primele p molecule de indice pereche $M_2, M_4, \ldots M_{2p}$.

Printr-un raționament analog se determină suma atomilor de carbon în primele $(p+1)$ molecule de indice impar $M_1, M_3, \ldots, M_{2p+1}$; fie $G(2p+1)$ această sumă, adică

$$G(2p+1) = g(1) + g(3) + \ldots + g(2p+1),$$

deducem

$$G(2p-1) = g(1) + g(3) + \ldots + g(2p-1),$$

iar prin scădere

$$G(2p+1) - G(2p-1) = g(2p+1).$$

Dar am văzut că $g(2p+1)$, care reprezintă numărul atomilor în molecula de indice $(2p+1)$, este egal cu $2p^2 + 2p + 1$, deci funcția necunoscută $G(2p+1)$ satisface *ecuația cu diferențe finite*

$$G(2p+1) - G(2p-1) = 2p^2 + 2p + 1. \tag{4}$$

Căutăm pentru funcția necunoscută o expresie de forma

$$G(2p+1) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D,$$

și deducem

$$G(2p-1) = A(p-1)^3 + B(p-1)^2 + C(p-1) + D,$$

iar ecuația (4) devine identitatea

$$3Ap^2 + (-3A + 2B)\,p + A - B + C \equiv 2p^2 + 2p + 1,$$

de unde deducem sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute

$$3A = 2, \quad -3A + 2B = 2, \quad A - B + C = 1,$$

Obținem $A = \frac{2}{3}$, $B = 2$, $C = \frac{7}{3}$, deci

$$G(2p+1) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = \frac{2p^3}{3} + 2p^2 + \frac{7p}{3} + D.$$

Constanta arbitrară D se determină ținînd seama că $G(1) = g(1) = 1$, pentru că molecula M_1 are 1 atom, deci făcînd $p = 0$, $1 = G(1) = D$, iar funcția $G(2p+1)$ este

$$G(2p+1) = \frac{2p^3}{3} + 2p^2 + \frac{7p}{3} + 1 = \frac{(p+1)(2p^2+4p+3)}{3}.$$

Dacă n este un număr par, $n = 2p$, numărul atomilor de carbon în primele n molecule $M_1, M_2, \ldots, M_n$ este evident egal cu suma $F(2p) + G(2p-1)$, pentru că $F(2p)$ reprezintă numărul atomilor în cele p molecule de indice par $M_2, M_4, \ldots$ $\ldots, M_{2p}$, iar $G(2p-1)$ reprezintă numărul atomilor în cele p molecule de indice impar $M_1, M_3, \ldots, M_{2p-1}$.

Dacă n este un număr impar, $n = 2p + 1$, numărul atomilor de carbon în primele n molecule $M_1, M_2, \ldots, M_n$ este evident egal cu suma $F(2p) + G(2p+1)$.

Dacă facem înlocuirile, și apoi punem $p = \frac{n}{2}$, obținem $F(2p)+G(2p-1)=$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1}{3} + p\,\frac{2(p-1)^2+4(p-1)+3}{3} =$$

$$= \frac{p(4p^2+3p+2)}{3} = \frac{n(2n^2+3n+4)}{12}.$$

La fel calculăm și a doua sumă, apoi punem $p = \frac{n-1}{2}$.

$$F(2p) + G(2p+1) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} + \frac{(p+1)(2p^2+4p+3)}{3} =$$

$$= \frac{(p+1)(4p^2+5p+3)}{3} = \frac{(n+1)(2n^2+n+3)}{12}.$$

În rezumat, numărul atomilor de carbon în primele n molecule $M_1, M_2, \ldots, M_n$ este

$$\frac{n(2n^2+3n+4)}{12} \quad \text{sau} \quad \frac{(n+1)(2n^2+n+3)}{12}$$

după cum n este număr par sau impar.

III.27. *Oscilațiile unui pendul simplu, de lungime l, descresc așa fel încît amplitudinea unei oscilații este egală cu q înmulțit cu amplitudinea oscilației precedente, $q < 1$.*

Știind că amplitudinea primei oscilații este de α grade, se cere să se calculeze lungimea drumului total parcurs de punctul material de la extremitatea pendulului, în primele n oscilații.

Caz particular: $l = 50$ cm, $q = \frac{4}{5}$, $\alpha = 9°$, $n = 10$.

Soluție. Drumul s_1, parcurs de punctul material, în prima oscilație, este egal cu lungimea arcului de cerc, de rază l, unghiul la centru fiind egal cu α grade sau $\frac{\pi\alpha}{180}$ radiani, deci

$$s_1 = \frac{l\pi\alpha}{180} \text{ cm},$$

dacă lungimea l este exprimată în centimetri. În a doua oscilație drumul s_2 parcurs de punctul material este egal cu lungimea

arcului de cerc de rază l, unghiul la centru fiind egal cu $q\alpha$ grade, deci

$$s_2 = \frac{l\pi q\alpha}{180} \text{ cm sau } s_2 = qs_1,$$

şi aşa mai departe

$$s_n = s_1 q^{n-1}.$$

Drumul total L_n parcurs în primele n oscilaţii este egal cu suma a n numere în progresie geometrică

$$L_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s_1(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = \frac{s_1(1-q^n)}{1-q},$$

$$L_n = \frac{l\pi\alpha(1-q^n)}{(1-q)\,180} \text{ cm}.$$

În cazul particular al problemei

$$L_{10} = 50 \times \pi \times 9 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{0{,}2 \times 180}.$$

$$\lg\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 10 \times (0{,}602\,06 - 0{,}698\,97) = -0{,}969\,1 = \bar{1}{,}030\,90,$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0{,}107\,375, \quad 1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0{,}892\,625,$$

$$L_{10} = \frac{100\pi \times 0{,}892\,625}{8} = \frac{89{,}262\,5\,\pi}{8}.$$

$$\lg L_{10} = 1{,}950\,67 + 0{,}497\,15 - 0{,}903\,09 = 1{,}544\,73,$$

$$L_{10} = 35{,}053 \text{ sau aproximativ, } L_{10} = 35 \text{ cm}.$$

Dacă $n \to \infty$, adică pendulul oscilează indefinit, $q^n \to 0$ pentru că $q < 1$ şi drumul parcurs este

$$L = \frac{s_1}{1-q} = \frac{l\pi\alpha}{(1-q) \times 180}.$$

În cazul particular al problemei

$$L = \frac{50 \times \pi \times 9}{0{,}2 \times 180} = 12{,}5 \times \pi.$$

$$\lg L = 1{,}096\,91 + 0{,}497\,15 = 1{,}594\,06$$

$$L = 39{,}27 \text{ sau aproximativ } L = 39{,}3 \text{ cm}.$$

III.28. *Să se calculeze ora exactă, între orele* 0 *şi* 12, *când cele două ace ale unui ceasornic sînt* (a) *confundate sau* (b) *în prelungire.*

Problema admite 11 *soluţii în cazul* (a) *şi* 11 *soluţii în cazul* (b); *se cere să se calculeze toate soluţiile şi să se verifice că ele sînt în progresie aritmetică.*

Soluţie. Fix la ora zero (sau la ora 12), minutarul şi orarul coincid (fac un unghi de zero grade). Într-o oră (60 minute), minutarul descrie întreg cercul, adică un unghi de 360°, deci în t minute (de timp), minutarul descrie un unghi de $\frac{t \times 360}{60}$ grade. Tot într-o oră (60 minute), orarul descrie un unghi de 30°, deci în t minute (de timp), el va descrie un unghi de $\frac{t \times 30}{60}$ grade. În momentul iniţial, adică la ora zero fix, unghiul format de minutar şi orar era egal cu zero grade, iar după t minute de timp, unghiul lor este egal cu diferenţa

$$\frac{t \times 360}{60} - \frac{t \times 30}{60} = \frac{11t}{2} \text{ grade.}$$

Prin ipoteză, minutarul şi orarul coincide sau sînt în prelungire, deci unghiul lor este egal cu

$$360°,\ 2 \times 360°,\ 3 \times 360°, \ldots,\ 11 \times 360°$$

sau

$$180°,\ 3 \times 180°,\ 5 \times 180°, \ldots,\ 21 \times 180°.$$

Dacă însemnăm cu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ cele 11 soluţii în cazul (a), adică cele două ace sînt confundate, avem

$$\frac{11t}{2} = \frac{11\ a_n}{2} = n \times 360$$

sau

$$a_n = \frac{n \times 720}{11},$$

unde

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 11.$$

Însă

$$\frac{720}{11} = 60 + \frac{60}{11},$$

deci

$$a_n = n \times 60 + \frac{n \times 60}{11}.$$

Ţinînd seama că t este exprimat în minute de timp, găsim $\frac{60}{11} = 5$ minute, 27 secunde şi $\frac{3}{11}$ dintr-o secundă, deci:

$a_1 = 1$ oră, 05 minute, 27 secunde şi $\frac{3}{11}$ dintr-o secundă;

$a_2 = 2$ ore, 10 minute, 54 secunde şi $\frac{6}{11}$ dintr-o secundă;

$a_3 = 3$ ore, 16 minute, 21 secunde şi $\frac{9}{11}$ dintr-o secundă;

$a_4 = 4$ ore, 21 minute, 49 secunde şi $\frac{1}{11}$ dintr-o secundă;

$a_5 = 5$ ore, 27 minute, 16 secunde şi $\frac{4}{11}$ dintr-o secundă;

$a_6 = 6$ ore, 32 minute, 43 secunde şi $\frac{7}{11}$ dintr-o secundă;

$a_7 = 7$ ore, 38 minute, 10 secunde şi $\frac{10}{11}$ dintr-o secundă;

$a_8 = 8$ ore, 43 minute, 38 secunde şi $\frac{2}{11}$ dintr-o secundă;

$a_9 = 9$ ore, 49 minute, 05 secunde şi $\frac{5}{11}$ dintr-o secundă

$a_{10} = 10$ ore, 54 minute, 32 secunde şi $\frac{8}{11}$ dintr-o secundă;

$a_{11} = 12$ ore.

Dacă însemnăm cu $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{11}$ cele 11 soluţii în cazul (b), adică cele două ace sînt în prelungire, avem

$$\frac{11t}{2} = \frac{11b_n}{2} = (2n - 1) \times 180$$

sau

$$b_n = \frac{(2n-1)\times 360}{11},$$

$$b_n = \frac{n \times 720}{11} - \frac{360}{11},$$

$b_n = a_n$ — (32 minute, 43 secunde și $\frac{7}{11}$ dintr-o secundă).

Dînd lui n valorile 1, 2, 3, ..., 11, obținem :

$b_1 = 0$ ore, 32 minute 43 secunde și $\frac{7}{11}$ dintr-o secundă;

$b_2 = 1$ oră, 38 minute, 10 secunde și $\frac{10}{11}$ dintr-o secundă;

$b_3 = 2$ ore, 43 minute, 38 secunde și $\frac{2}{11}$ dintr-o secundă;

$b_4 = 3$ ore, 49 minute, 05 secunde și $\frac{5}{11}$ dintr-o secundă;

$b_5 = 4$ ore, 54 minute, 32 secunde și $\frac{8}{11}$ dintr-o secundă;

$b_6 = 6$ ore;

$b_7 = 7$ ore, 05 minute, 27 secunde și $\frac{3}{11}$ dintr-o secundă;

$b_8 = 8$ ore, 10 minute, 54 secunde și $\frac{6}{11}$ dintr-o secundă;

$b_9 = 9$ ore, 16 minute, 21 secunde și $\frac{9}{11}$ dintr-o secundă;

$b_{10} = 10$ ore, 21 minute, 49 secunde și $\frac{1}{11}$ dintr-o secundă;

$b_{11} = 11$ ore, 27 minute, 16 secunde și $\frac{4}{11}$ dintr-o secundă.

Valorile $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ formează o progresie aritmetică cu rația egală cu 1 oră, 05 minute, 27 secunde și $\frac{3}{11}$ dintr-o secundă;

la fel, valorile $b_1, b_2, \ldots, b_n$ formează o progresie aritmetică cu aceeași rație.

Mai mult, valorile intercalate

$$b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ b_3,\ a_3 \ldots,\ b_{11},\ a_{11}$$

formează o progresie aritmetică cu rația egală cu

$$32 \text{ minute, } 43 \text{ secunde și } \frac{7}{11} \text{ dintr-o secundă}$$

III.29. *Într-o progresie aritmetică, se notează*
s_1 = *suma primilor* n *termeni,*
s_2 = *suma primilor* $2n$ *termeni*
s_3 = *suma primilor* $3n$ *termeni.*
Să se calculeze expresia

$$E = 3s_1 - 3s_2 + s_3.$$

Soluție. Dacă a este primul termen al progresiei aritmetice iar r rația, termenul de rangul n are valoarea $a + (n-1)r$, deci suma s_1 este

$$s_1 = \frac{1}{2}\{a + [a + (n-1)r]\} \times n = an + n(n-1)\frac{r}{2}.$$

Suma s_2 a primilor $2n$ termeni se deduce din s_1 înlocuind pe n cu $2n$, iar s_3 se obține înlocuind pe n cu $3n$, deci

$$s_2 = 2an + 2n(2n-1)\frac{r}{2},$$

$$s_3 = 3an + 3n(3n-1)\frac{r}{2}.$$

Expresia dată devine, făcînd înlocuirile,

$$E = 3s_1 - 3s_2 + s_3 =$$

$$= 3an + 3n(n-1)\frac{r}{2} - 6an - 6n(2n-1)\frac{r}{2} +$$

$$+ 3an + 3n(3n-1)\frac{r}{2} = (3an - 6an + 3an) +$$

$$+ \frac{3}{2}nr\left\{n - 1 - 2(2n-1) + 3n - 1\right\} = 0.$$

Generalizare. Fiind dată o progresie aritmetică, în care primul termen este α și rația ρ, fie $p < q < r$ trei numere întregi pozitive. Însemnăm cu P, Q, R sumele primilor p, q, r termeni ai seriei și avem

$$P = \alpha p + p(p-1)\frac{\rho}{2},$$

$$Q = \alpha q + q(q-1)\frac{\rho}{2},$$

$$R = \alpha r + r(r-1)\frac{\rho}{2}.$$

Ne propunem să determinăm trei numere A, B, C așa fel ca să avem identitatea

$$AP + BQ + CR = 0,$$

oricare ar fi α și ρ; deducem

$$\alpha(Ap + Bq + Cr) + \frac{1}{2}\rho\{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - (Ap + Bq + Cr)\} = 0.$$

Condiția necesară și suficientă este

$$Ap + Bq + Cr = 0, \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 0,$$

de unde deducem pentru A, B, C cantități proporționale

$$\frac{A}{qr(q-r)} = \frac{B}{rp(r-p)} = \frac{C}{pq(p-q)}.$$

În cazul particular al problemei, $p = n$, $q = 2n$, $r = 3n$, deci

$$\frac{A}{6n^2(2n-3n)} = \frac{B}{3n^2(3n-n)} = \frac{C}{2n^2(n-2n)}$$

sau

$$\frac{A}{(-6)} = \frac{B}{6} = \frac{C}{(-2)}$$

sau

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{(-3)} = \frac{C}{1}$$

și putem lua $A = 3$, $B = -3$, $C = 1$.

Dacă q și r sînt multipli de p, adică

$$q = \lambda p, \; r = \mu p,$$

putem lua pentru A, B, C cantităţi care depind de rapoartele λ şi μ, dar nu depind de p; într-adevăr

$$\frac{A}{\lambda\mu p^2(\lambda p - \mu p)} = \frac{B}{\mu p^2(\mu p - p)} = \frac{C}{\lambda p^2(p - \lambda p)}$$

şi putem lua

$$A = \lambda\mu(\lambda - \mu),\ B = \mu(\mu - 1),\ C = \lambda(1 - \lambda).$$

Dacă q şi r nu sînt multipli de p, formulele găsite subsistă, cu deosebirea că în acest caz λ şi μ sînt numere fracţionare.

De exemplu, dacă $\lambda = 3$, $\mu = 7$, avem

$A = 21\ (3 - 7) = -84$; $B = 7\ (7-1) = 42$; $C = 3\ (1 - 3) = -6$ sau împărţind numerele găsite cu -6,

$$A = 14,\ B = -7,\ C = 1.$$

Urmează că dacă P este suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice, Q suma primilor $3n$ termeni, iar R suma primilor $7n$ termeni, între aceste sume există identitatea, oricare ar fi α, ρ, n

$$14P - 7Q + R = 0.$$

Dacă $p = 3n$, $q = 4n$, $r = 5n$, avem $\lambda = \frac{4}{3}$ şi $\mu = \frac{5}{3}$, deci

$$A = \frac{20}{9}\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\right) = -\frac{20}{27},$$

$$B = \frac{5}{3}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{10}{9},$$

$$C = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}$$

sau înmulţind cu $-\frac{27}{2}$, $A = 10$, $B = -15$, $C = 6$, de unde rezultă că între sumele P, Q, R ale primilor $3n$, $4n$, $5n$ termeni, există identitatea $10P - 15Q + 6R = 0$.

III.30. *Se dau două numere a şi b; se cere să se determine alte două numere x şi y, ştiind că*
numerele a, x, y sînt în progresie aritmetică, iar
numerele x, y, b sînt în progresie geometrică.

Caz particular: $a = \frac{17}{3}$, $b = \frac{1}{27}$.

Soluţie. Fie r raţia progresiei aritmetice şi q raţia progresiei geometrice; rezultă din enunţ că

$$x = a + r,\ y = x + r,\ \text{deci}\ x - y = a - x;$$

$$y = xq,\quad b = yq,\quad \text{deci}\ \frac{y}{b} = \frac{x}{y}.$$

Numerele x, y sînt date de sistemul de două ecuații

$$a + y = 2x, \; bx = y^2.$$

Prin eliminarea lui x deducem

$$a + y = \frac{2y^2}{b} \quad \text{sau} \quad 2y^2 - by - ab = 0,$$

de unde deducem $4y = b \pm \sqrt{b^2 + 8ab}$.

Prin ridicare la pătrat rezultă

$$8y^2 = b^2 + 4ab \pm b\sqrt{b^2 + 8ab}$$

deci

$$8x = b + 4a \pm \sqrt{b^2 + 8ab}.$$

În definitiv,

$$x = \frac{1}{8}\left(b + 4a \pm \sqrt{b^2 + 8ab}\right), \quad y = \frac{1}{4}\left(b \pm \sqrt{b^2 + 8ab}\right),$$

semnele $\pm$ corespunzîndu-se.

Dacă $a = \frac{17}{3}$, $b = \frac{1}{27}$, deducem valorile

$$x_1 = 3, \; y_1 = \frac{1}{3} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{289}{54}, \quad y_2 = -\frac{17}{54}.$$

III.31. *Să se rezolve ecuația* $\sin 3x = m \sin^2 x$. *Să se discute soluțiile după valorile parametrului* m. *Se vor considera în particular valorile* $m = 0$ *și* $m = \pm 4$.

Soluție. Ținînd seama de formula $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, ecuația dată se scrie $3 \sin x - 4 \sin^3 x = m \sin^2 x$.

Suprimînd factorul $\sin x$, care ne dă soluțiile $x = k\pi$ (k întreg oarecare), rămîne ecuația de gradul al doilea

$$4u^2 + mu - 3 = 0, \tag{1}$$

unde am pus $u = \sin x$. Ecuația (1) trebuie să aibă rădăcinile reale și cuprinse între -1 și $+1$, pentru ca ecuația $\sin x = u$ să poată avea rădăcinile reale.

Ecuația (1) are totodeauna rădăcinile reale, căci realizantul ei $m^2 + 48$ este totdeauna pozitiv, dacă m este un parametru real.

Să vedem în ce caz rădăcinile ecuației (1) sînt cuprinse între -1 și $+1$. Pentru aceasta facem transformarea $t = \frac{u-1}{u+1}$; Ecuația (1) devine $4(1+t)^2 + m(1-t^2) - 3(1-t^2) = 0$, sau

$$(1-m)t^2 + 14t + 1 + m = 0. \qquad (2)$$

Ecuația (1) va avea rădăcinile cuprinse între -1 și $+1$ cînd ecuația (2) va avea rădăcinile sale ambele negative. Pentru aceasta trebuie ca suma și produsul rădăcinilor ecuației (2) să fie respectiv mai mică și mai mare ca zero, adică

$$\frac{-14}{1-m} < 0, \quad \frac{1+m}{1-m} > 0.$$

Aceste inegalități sînt echivalente cu următoarele

$$1 - m > 0, \; 1 - m^2 > 0.$$

Prima ne dă $m < 1$, iar a doua $-1 < m < 1$.

Aceste condiții simultane se reduc la $-1 < m < 1$.

În aceste condiții (1) are rădăcinile sale cuprinse între -1 și $+1$, deci ecuația $\sin x = u$ are rădăcinile reale.

Dacă $m = 0$, ecuația se reduce la $\sin 3x = 0$, care admite soluțiile $x = \frac{k\pi}{3}$ (k întreg oarecare).

Dacă $m = \pm 4$, ecuația $4\sin^2 x \pm 4 \sin x - 3 = 0$ are rădăcinile imaginare, conform celor stabilite.

III.32. *Se dă un unghi $xOy = u$ și un punct P situat pe Ox, distanța $OP = 1$. Fie P_1 proiecția lui P pe Oy, fie P_2 proiecția lui P_1 pe Ox, fie P_3 proiecția lui P_2 pe Oy și așa mai departe. Să se calculeze suma lungimilor următoarelor n segmente*

$$L_n = PP_1 + P_1P_2 + \ldots + P_{n-1}P_n.$$

și suma ariilor următoarelor n triunghiuri

$$S_n = \text{aria } OPP_1 + \text{aria } OP_1P_2 + \ldots + \text{aria } OP_{n-1}P_n$$

Soluție. În triunghiul dreptunghi OP_1P avem

$$OP = l, \; OP_1 = l\cos u, \; PP_1 = l \sin u.$$

La fel, în triunghiul dreptunghi OP_2P_1 avem

$$OP_2 = OP_1\cos u = l\cos^2 u, \; P_1P_2 = OP_1 \sin u = l \cos u \sin u.$$

Din triunghiul dreptunghi OP_3P_2 deducem

$$OP_3 = OP_2 \cos u = l\cos^3 u,\quad P_2P_3 = OP_2 \sin u = l\cos^2 u \sin u$$

Demonstrăm prin inducție completă că $OP_n = l\cos^n u$; într-adevăr formula este adevărată pentru $n = 1, 2, 3$; să presupunem că este adevărată pentru $n-1$, adică $OP_{n-1} = l\cos^{n-1} u$; din triunghiul dreptunghi OP_nP_{n-1} deducem

$$OP_n = OP_{n-1} \cos u = l\cos^n u,$$

adică formula subsistă pentru indicele n, deci este generală.

Din același triunghi deducem

$$P_{n-1}P_n = OP_{n-1} \sin u = l\cos^{n-1} u \sin u. \qquad (1)$$

Calculăm ariile triunghiurilor dreptunghice din suma S_n.

$$2 \text{ aria } OPP_1 = OP_1 \times PP_1 = l\cos u \times l\sin u = l^2 \cos u \sin u,$$

$$2 \text{ aria } OP_1P_2 = OP_2 \times P_1P_2 = l\cos^2 u \times l\cos u \sin u = l^2\cos^3 u \sin u,$$

și în general

$$2 \text{ aria } OP_{n-1}P_n = OP_n \times P_{n-1}P_n = l\cos^n u \times l\cos^{n-1} u \sin u,$$

$$2 \text{ aria } OP_{n-1}P_n = l^2\cos^{2n-1} u \sin u. \qquad (2)$$

Ținînd seama de formulele (1) și (2), deducem

$$L_n = l\sin u + l\cos u \sin u + \ldots + l\cos^{n-1} u \sin u,$$

$$2S_n = l^2 \cos u \sin u + l^2\cos^3 u \sin u + \ldots + l^2\cos^{2n-1} u \sin u,$$

sau scoțînd factorul comun,

$$L_n = l\sin u(1 + \cos u + \ldots + \cos^{n-1} u),$$

$$2S_n = l^2 \cos u \sin u\,(1 + \cos^2 u + \ldots + \cos^{2n-2} u).$$

În prima (a doua) paranteză avem suma unui număr de n termeni în progresie geometrică, primul fiind 1, iar rația egală cu $q = \cos u$ ($q = \cos^2 u$); dar

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

deci

$$L_n = \frac{l \sin u (1 - \cos^n u)}{1 - \cos u},$$

$$2S_n = \frac{l^2 \cos u \sin u (1 - \cos^{2n} u)}{1 - \cos^2 u},$$

$$S_n = \frac{l^2 \cos u (1 - \cos^{2n} u)}{2 \sin u}. \qquad (3)$$

Dacă $n \to \infty$, $\cos^n u \to 0$ și $\cos^{2n} u \to 0$, pentru că $\cos u < 1$, iar sumele L_n și S_n tind către limitele

$$L_n \to L = \frac{l \sin u}{1 - \cos u} = l \operatorname{ctg}\left(\frac{u}{2}\right),$$

$$S_n \to S = \frac{l^2 \cos u}{2 \sin u} = \frac{l^2 \operatorname{ctg} u}{2}.$$

III.33. *Dacă numerele*

$$\frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}$$

sînt în progresie aritmetică, să se arate că și numerele a^2, b^2, c^2 *sînt în progresie aritmetică.*

Soluție. Condiția necesară și suficientă ca trei numere A, B, C să fie în progresie aritmetică este ca termenul mijlociu să fie media aritmetică a termenilor extremi. Într-adevăr, fie numerele A, B, C în progresie aritmetică și fie r rația progresiei; după definiția progresiei aritmetice,

$$B = A + r, \; C = B + r,$$

de unde deducem prin eliminarea lui r

$$r = B - A = C - B \quad \text{sau} \quad 2B = A + C, \; B = \frac{A + C}{2},$$

adică B este egal cu media aritmetică a numerelor A și C.

Reciproca este adevărată; dacă $B = \frac{A + C}{2}$, deducem

$$2B = A + C, \; B - A = C - B$$

şi dacă însemnăm cu r diferenţa $B - A$, deducem

$$B - A = r,\ C - B = r \text{ sau } B = A + r,\ C = B + r,$$

adică numerele A, B, C sînt în progresie aritmetică.

Prin ipoteză numerele $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ sînt în progresie aritmetică, urmează că termenul mijlociu este media aritmetică a termenilor extremi, adică

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}.$$

şi scăpînd de numitori

$$2(b+c)(a+b) = (a+b)(c+a) + (c+a)(b+c).$$

Desfacem parantezele şi reducem termenii asemenea,

$$2(ba + b^2 + ca + cb) = ac + a^2 + bc + ba + cb + c^2 + ab + ac,$$

$$2b^2 = a^2 + c^2,\ b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$$

adică b^2 este egal cu media aritmetică a numerelor a^2 şi c^2, deci numerele a^2, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică.

III.34. *Dacă numerele*

$$\frac{1}{b-a},\ \frac{1}{2b},\ \frac{1}{b-c}$$

sînt în progresie aritmetică, să se arate că numerele a, b, c sînt în progresie geometrică.

Soluţie. Condiţia necesară şi suficientă ca trei numere A, B, C să fie în progresie geometrică, este ca termenul mijlociu să fie media geometrică a termenilor extremi. Într-adevăr fie numerele A, B, C în progresie geometrică şi fie q raţia progresiei; după definiţia progresiei geometrice,

$$B = A \times q,\quad C = B \times q$$

de unde deducem prin eliminarea lui q,

$$q = \frac{B}{A} = \frac{C}{B} \text{ sau } B^2 = AC,\ B = \sqrt{AC},$$

adică B este egal cu media geometrică a numerelor A şi C.

Reciproca este adevărată; dacă $B = \sqrt{AC}$, deducem

$$B^2 = AC, \quad \frac{B}{A} = \frac{C}{B}$$

şi dacă însemnăm cu q raportul $\frac{B}{A}$, deducem

$$\frac{B}{A} = q, \frac{C}{B} = q \text{ sau } B = A \times q, \quad C = B \times q,$$

adică numerele A, B, C sînt în progresie geometrică.

Prin ipoteză numerele $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b-c}$ sînt în progresie aritmetică, urmează că termenul mijlociu este egal cu media aritmetică a termenilor extremi, adică

$$\frac{2}{2b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$$

sau scăpînd de numitori,

$$(b-a)(b-c) = b(b-c) + b(b-a),$$

$$b^2 - bc - ab + ac = b^2 - bc + b^2 - ab,$$

$$ac = b^2 \text{ sau } b = \sqrt{ac},$$

adică b este egal cu media geometrică a numerelor a şi c, deci numerele a, b, c formează o progresie geometrică.

III.35. *Se consideră toate numerele care sînt divizibile cu* **7** *şi sînt cuprinse între* 100 *şi* 1 000; *să se calculeze suma lor.*

Soluţie. Împărţim numerele 100 şi 1 000 cu 7 şi obţinem

$$100 = 7 \times 14 + 2, \quad 1\,000 = 7 \times 142 + 6.$$

Urmează că cel mai mic multiplu de 7, superior lui 100, este $7 \times 15 = 105$, iar cel mai mare multiplu de 7, inferior lui 1 000, este $7 \times 142 = 994$. Multiplii lui 7, cuprinşi între 100 şi 1 000, sînt deci

$$7 \times 15, 7 \times 16, 7 \times 17, \ldots, 7 \times 141, 7 \times 142,$$

sau

$$105, 112, 119, \ldots, 987, 994.$$

Aceste numere formează o progresie aritmetică, în care primul termen este $a_1 = 105$, ultimul termen $a_n = 994$, raţia $r = 7$, iar numărul n al termenilor este dat de formula

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

deci

$$994 = 105 + (n - 1) \times 7, \quad n - 1 = 142 - 15, \quad n = 128.$$

Suma S_n a numerelor din această progresie aritmetică este dată de formula

$$S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$$

şi făcînd înlocuirile,

$$S_n = \frac{128 \times (105 + 994)}{2} = 70336.$$

Ca exerciţiu propunem să se determine, prin aceeaşi metodă, suma multiplilor lui $N = 101$, cuprinşi între $A = 1\,000$ şi $B = 100\,000$.

III.36. *Media aritmetică a numerelor x, y este egală cu media geometrică a numerelor a, b şi ambele medii sînt egale cu*

$$\frac{ax + by}{x + y}.$$

Să se calculeze x şi y în funcţie de a şi b; caz particular: $a = 9$, $b = 49$.

Soluţie. Media aritmetică a numerelor x, y este $\frac{x + y}{2}$, iar media geometrică a numerelor a, b este $\sqrt{ab}$; prin ipoteză, aceste medii sînt egale cu $\frac{ax + by}{x + y}$, adică avem sistemul de două ecuaţii, cu două necunoscute x şi y,

$$\frac{x + y}{2} = \sqrt{ab} = \frac{ax + by}{x + y},$$

de unde deducem $x + y = 2\sqrt{ab}$ şi

$$ax + by = (x + y)\sqrt{ab} = 2ab.$$

Avem deci de rezolvat sistemul

$$x + y = 2\sqrt{ab}, \quad ax + by = 2ab$$

de unde deducem $y = -x + 2\sqrt{ab}$ şi a doua ecuaţie devine

$$ax + b(-x + 2\sqrt{ab}) = 2ab,$$

$$x = \frac{2ab - 2b\sqrt{ab}}{a - b} = \frac{2b\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

Dar $(a - b) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, deci

$$x = \frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

şi pentru motive de simetrie,

$$y = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

În cazul particular $a = 9$, $b = 49$, avem

$$x = \frac{2 \times 49 \times 3}{3 + 7} = \frac{294}{10} = 29{,}4$$

$$y = \frac{2 \times 9 \times 7}{3 + 7} = \frac{126}{10} = 12{,}6.$$

Ca verificare, $x + y = 29{,}4 + 12{,}6 = 42 = 2 \times 21 = 2 \times \sqrt{9 \times 49}$; $ax + by = 9 \times 29{,}4 + 49 \times 12{,}6 = 264{,}6 + 617{,}4 = 882 = 2 \times 441 = 2 \times 9 \times 49$.

III.37. *Într-o progresie aritmetică, primul termen este a, raţia r, numărul termenilor $2n$. Să se calculeze raportul $\frac{A}{B}$, unde A este suma primilor n termeni, iar B suma ultimilor n termeni.*

Caz particular $a = 1$, $r = 2$.

Soluţie. Într-o progresie aritmetică în care primul termen este a_1 şi raţia r, termenul a_n de rangul n şi suma S_n a primilor n termeni sînt respectiv

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

de unde deducem $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)r}{2}$, deci

$$A = na_1 + \frac{n(n-1)r}{2}, \quad B = nb_1 + \frac{n(n-1)r}{2}.$$

Însă primul termen b_1 din progresia aritmetică B, este egal cu termenul $a_n + 1$ de rangul $(n + 1)$ din progresia aritmetică $A + B$, deci $b_1 = a_{n+1} = a_1 + nr$ şi înlocuind peste tot a_1 cu a obţinem

$$\frac{A}{B} = \frac{na + \frac{n(n-1)r}{2}}{na + \frac{n(3n-1)r}{2}},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2a + (n-1)r}{2a + (3n-1)r}.$$

În cazul particular $a = 1$, $r = 2$, avem

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

oricare ar fi valoarea lui n, adică raportul dintre suma primelor n numere impare şi suma următoarelor n numere impare este egal cu $\frac{1}{3}$, oricare ar fi valoarea lui n.

III.38. *Dacă a, b, c, d sînt patru numere în progresie geometrică, avem $a^2 + d^2 \geqslant b^2 + c^2$; iar dacă a, b, c, d sînt patru numere în progresie aritmetică, avem $ad \leqslant bc$.*

Soluţie. Dacă numerele sînt în progresie geometrică, q fiind raţia, putem scrie a, $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$ iar inegalitatea, care trebuie verificată, devine

$$a^2 + a^2q^6 \geqslant a^2q^2 + a^2q^4 \text{ sau } (q^6 + 1)\,a^2 \geqslant q^2\,(q^2 + 1)a^2.$$

Însă dacă împărţim cu numărul pozitiv $(q^2 + 1)\,a^2$, inegalitatea nu-şi schimbă sensul şi obţinem

$$q^4 - q^2 + 1 \geqslant q^2 \text{ sau } (q^2 - 1)^2 \geqslant 0,$$

inegalitate evidentă, pentru că patratul unui număr oarecare $(q^2 - 1)$ este un număr pozitiv sau nul. Semnul egal corespunde la $q^2 - 1 = 0$ sau $q = \pm 1$.

Dacă numerele sînt în progresie aritmetică, r fiind raţia, putem scrie a, $b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$ iar inegalitatea, care trebuie verificată, devine

$$a\,(a + 3r) \leqslant (a + r)\,(a + 2r)$$

de unde deducem inegalitatea evidentă $0 \leqslant 2r^2$, semnul egal corespunzînd la $r = 0$.

III.39. *Se dă* $\lg 2 = 0{,}301$ *şi* $\lg 3 = 0{,}477$; *să se calculeze logaritmii numerelor* $a = 72$, $b = \frac{9}{8}$, $c = \frac{4}{45}$.

Soluţie.

$$a = 72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2,\ \lg a = \lg 2^3 + \lg 3^2,$$

$$\lg a = 3\lg 2 + 2\lg 3 = 3 \times 0{,}301 + 2 \times 0{,}477 = 0{,}903 + 0{,}954 = 1{,}858.$$

$$b = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3},\ \lg b = \lg 3^2 - \lg 2^3,$$

$$\lg b = 2\lg 3 - 3\lg = 2 \times 0{,}477 - 3 \times 0{,}301 = 0{,}954 - 0{,}903 = 0{,}051.$$

$$c = \frac{4}{45} = \frac{2^2}{3^2 \times 5} = \frac{2^3}{3^2 \times 10},$$

$$\lg c = \lg 2^3 - \lg 3^2 - \lg 10 = 3 \times 0{,}301 - 2 \times 0{,}477 - 1 =$$

$$= 0{,}903 - 0{,}954 - 1 = -1{,}051 = \bar{2}{,}949.$$

III. 40. *Să se verifice că*

$$7(1 + 4 + 7 + \ldots + 100) = 304 + 307 + 310 + \ldots + 403.$$

Soluţie. În paranteza din membrul întîi avem o progresie aritmetică în care primul termen $a_1 = 1$, raţia $r = 3$, iar ultimul termen $a_n = 100$; pentru a calcula numărul n al termenilor, folosim formula în care facem înlocuirile,

$$a_n = a_1 + (n-1)r,\ 100 = 1 + (n-1)3;\ n = 34.$$

În membrul al doilea avem o progresie aritmetică în care primul termen $b_1 = 304$, raţia $r = 3$, ultimul termen $b_m = 403$, iar numărul m al termenilor se deduce din formula

$$b_m = b_1 + (m-1)r,\ 403 = 304 + (m-1)3,\ m = 34.$$

Suma progresiei aritmetice din membrul întîi este

$$S_1 = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 34 \cdot \frac{1 + 100}{2} = 17 \cdot 101,$$

iar suma progresiei aritmetice din membrul al doilea este

$$S_2 = \frac{m(b_1 + b_m)}{2} = 34 \cdot \frac{304 + 403}{2} = 17 \cdot 707.$$

Deducem $S_2 = 17 \cdot 101 \cdot 7 = 7 \cdot S_1$.

III.41. *Patru sfere A, B, C, D au razele egale respectiv cu* 3, 4, 5, 6 cm; *ce relaţii simple există între ariile şi volumele lor?*

Soluţie. Dacă însemnăm cu

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5,\ d = 6$$

razele celor patru sfere, ariile şi volumele lor sînt egale cu

$$S_a = 4\pi 3^2,\ S_b = 4\pi 4^2,\ S_c = 4\pi 5^2,\ S_d = 4\pi 6^2;$$

$$V_a = \frac{4\pi 3^3}{3},\ V_b = \frac{4\pi 4^3}{3},\ V_c = \frac{4\pi 5^3}{3},\ V_d = \frac{4\pi 6^3}{3}.$$

Însă $3^2 + 4^2 = 5^2$ şi $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, rezultă

$$S_a + S_b = S_c \quad \text{şi} \quad V_a + V_b + V_c = V_d.$$

III.42. *Se ştie că* $\lg 2 = 0{,}3010$, $\lg 3 = 0{,}4771$, $\lg 7 = 0{,}8451$. *Să se afle cîte cifre are numărul* 875^{34} *şi să se verifice inegalitatea*

$$\left(\frac{81}{80}\right)^{1\,000} > 100\,000.$$

Soluţie. Numărul 875 descompus în factori primi este egal cu $5^3 \times 7$, deci

$$\lg 875 = 3\lg 5 + \lg 7.$$

Cunoaştem $\lg 7$, dar nu cunoaştem $\lg 5$; observăm însă că putem scrie $5 = \frac{10}{2}$, deci $875 = \frac{10^3 \times 7}{2^3}$ deci

$$\lg 875 = 3\lg 10 + \lg 7 - 3\lg 2 = 3 + 0{,}845\,1 - 0{,}903\,0 = 2{,}942\,1.$$

$$\lg 875^{34} = 34 \times 2{,}942\,1 = 100{,}031\,4.$$

Am găsit că logaritmul lui 875^{34} are caracteristica egală cu 100 şi mantisa egală cu 0,314; rezultă că numărul nostru are

$$100 + 1 = 101 \text{ cifre.}$$

Pentru a stabili inegalitatea cerută, luăm logaritmii în ambele părţi şi sensul inegalităţii se păstrează

$$1\,000 \lg\left(\frac{81}{80}\right) > \lg\ 100\,000, \qquad 1\,000 \lg\left(\frac{3^4}{2^3 \times 10}\right) > \lg\ 10^5,$$

$$1\,000\ (4\lg 3 - 3\lg 2 - \lg 10) > 5\lg 10,$$

$$1\,000\ (1{,}908\,4 - 0{,}903\,0 - 1) > 5, \qquad 1\,000 \times 0{,}0054 > 5$$

sau $5{,}4 > 5$, inegalitate evidentă.

III.43. *Să se calculeze logaritmul x al lui $A = 243 \times \sqrt[5]{9}$ în baza $a = 3\sqrt{3}$ și logaritmul y al lui $B = 32 \times \sqrt[5]{4}$ în baza $b = 2\sqrt{2}$.*

Soluție. După definiția logaritmului, x este definit de ecuația exponențială $a^x = A$. Dacă observăm că a este egal cu numărul 3 ridicat la puterea $\frac{3}{2}$, iar numărul A este egal cu numărul 3 ridicat la puterea $\frac{27}{5}$, ultima ecuație exponențială se reduce la $\frac{3x}{2} = \frac{27}{5}$, de unde deducem $x = \frac{18}{5} = 3{,}6$.

La fel, y este definit de ecuația exponențială $b^y = B$. Observăm că numărul b este egal cu numărul 2 ridicat la puterea $\frac{3}{2}$ iar numărul B este egal cu numărul 2 ridicat la puterea $\frac{27}{5}$ de unde deducem ca mai sus $\frac{3y}{2} = \frac{27}{5}$ sau $y = \frac{18}{5} = 3{,}6$.

III.44.1. *Șirul numerelor naturale* 1,2,3,4,... *este împărțit pe grupe:*
grupa întîia conține primul număr 1;
grupa a doua conține următoarele 3 *numere* 2,3,4;
grupa a treia conține următoarele 5 *numere* 5, 6, 7, 8, 9;
grupa a patra conține următoarele 7 *numere* 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16;
și așa mai departe.

Să se scrie numerele din grupa de rangul n și să se calculeze suma lor; caz particular $n = 5$.

2. *Să se studieze aceeași problemă cînd se înlocuiește șirul numerelor naturale* 1, 2, 3, 4,... *cu șirul numerelor impare* 1,3,5,...

Soluție. 1. Prima grupă conține $1 = 2 \times 1 - 1$ termeni, a doua grupă conține $3 = 2 \times 2 - 1$ termeni, deci grupa de rangul n conține $2n-1$ termeni.

Ultimul termen din grupa întîia este 1, ultimul termen din grupa a doua este $1 + 3 = 4 = 2^2$, ultimul termen din grupa a treia este $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, deci ultimul termen din grupa de rangul n este

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Urmează că ultimul termen în grupa de rangul $(n-1)$ este $(n-1)^2$, deci primul termen în grupa de rangul n este numărul

natural următor, adică $(n-1)^2+1$. Termenii din grupa de rangul n sînt deci numerele naturale consecutive

$$(n-1)^2+1,\ (n-1)^2+2,\ldots,n^2,$$

ei formează o progresie aritmetică în care primul termen este $a_1=(n-1)^2+1$, ultimul termen este $a_m=n^2$, numărul termenilor este $m=2n-1$, deci suma lor este

$$S_n=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=\frac{(2n-1)(n^2-2n+2+n^2)}{2}=(2n-1)(n^2-n+1).$$

În cazul particular $n=5$, termenii grupei sînt

$$17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,$$

iar suma lor $\frac{9(17+25)}{2}=189$, rezultat care concordă cu valoarea lui S_n pentru $n=5$,

$$S_5=(2\cdot 5-1)(5^2-5+1)=(10-1)(25-5+1)=189.$$

2. Prin ipoteză
grupa întîia conține primul număr impar 1;
grupa a doua conține următoarele trei numere impare 3, 5, 7;
grupa a treia conține următoarele cinci numere impare 9, 11, 13, 15, 17;
grupa a patra conține următoarele șapte numere impare 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31; etc.

Ca și în cazul precedent, grupa de rangul n conține $2n-1$ termeni.

Ultimul termen din grupa întîia este 1; ultimul termen din grupa a doua este al patrulea ($1+3=4=2^2$) număr impar, adică $2\cdot 4-1=7$; ultimul termen din grupa a treia este al nouălea ($1+3+5=9=3^2$) număr impar, adică $2\cdot 9-1=17$, deci ultimul termen din grupa de rangul n este numărul impar de rangul n^2, adică $2n^2-1$.

Urmează că ultimul termen în grupa de rangul $n-1$ este $2(n-1)^2-1$, deci primul termen în grupa de rangul n este numărul impar consecutiv, adică $2(n-1)^2+1$.

Termenii din grupa de rangul n sînt deci numerele impare consecutive

$$2(n-1)^2+1,\ 2(n-1)^2+3,\ldots,2n^2-1;$$

ei formează o progresie aritmetică în care primul termen este $a_1=2(n-1)^2+1$, ultimul termen este $a_m=2n^2-1$, numărul

termenilor este $m = 2n-1$, deci suma lor este

$$\Sigma_n = \frac{m(a_1+a_n)}{2} = \frac{(2n-1)[2(n-1)^2+1+2n^2-1]}{2} = (2n-1)[(n-1)^2+n^2].$$

De exemplu, pentru $n = 4$,

$$\Sigma_4 = (2 \cdot 4-1)\ (3^2+4^2) = 7 \cdot 25 = 175,$$

rezultat care concordă cu

$$19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 = \frac{7 \cdot (19+31)}{2} = 7 \cdot 25 = 175.$$

III.45. *Dacă* $a^2 + b^2 = 23ab$, *să se arate că*

$$\lg\left[\frac{a+b}{5}\right] = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

Soluţie. Adunăm la ambii membri ai egalităţii date numărul $2ab$ şi deducem

$$(a+b)^2 = 25ab.$$

Trecem de la numere la logaritmi; ţinem seama că $\lg 25 = \lg 5^2 = 2 \lg 5$ şi obţinem

$$2 \lg (a+b) = 2 \lg 5 + \lg a + \lg b,$$

sau împărţind cu 2,

$$\lg (a+b) - \lg 5 = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

Însă diferenţa de logaritmi din membrul întîi este egală cu logaritmul cîtului $\frac{a+b}{5}$.

III.46. *Se dau numerele*

$$x = a^2-2ab-b^2,$$
$$y = a^2+b^2,$$
$$z = a^2+2ab-b^2,$$

şi se cere să se arate că numerele x^2, y^2, z^2 *sînt în progresie aritmetică.*

Caz particular $a = 5$, $b = 1$.

Soluție. Condiția necesară și suficientă ca numerele x^2, y^2, z^2 să fie în progresie aritmetică, este

$$y^2-x^2 = z^2-y^2$$

sau

$$(y-x)\ (y+x) = (z-y)\ (z+y).$$

Dacă facem înlocuirile, avem

$$y-x = 2b^2 + 2ab,$$
$$y+x = 2a^2-2ab,$$
$$z-y = 2ab-2b^2,$$
$$z+y = 2a^2 + 2ab,$$

și produsele

$$(y-x)\ (y+x) = 4ab\ (a+b)\ (a-b),$$
$$(z-y)\ (z+y) = 4ab\ (a-b)\ (a+b)$$

sînt evident egale, oricare ar fi numerele a și b.

În cazul particular $a = 5$, $b = 1$, avem

$$x = 14 = 2 \cdot 7,\ x^2 = 4 \cdot 49,$$
$$y = 26 = 2 \cdot 13,\ y^2 = 4 \cdot 169,$$
$$z = 34 = 2 \cdot 17,\ z^2 = 4 \cdot 289$$

și numerele x^2, y^2, z^2 sînt în progresie aritmetică pentru că

$$169-49 = 120 \text{ și } 289-169 = 120.$$

Dacă $P(x, y, z)$ este un polinom în raport cu variabilele x, y, z, cu coeficienți numere întregi, ecuația $P(x, y, z) = 0$ poartă numele de ecuație diofantică, cînd se studiază din punctul de vedere al determinării numerelor întregi x, y, z care o verifică.

Cea mai simplă ecuație diofantică este ecuația pitagorică

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

iar numerele întregi x, y, z, de exemplu 3, 4, 5, care o verifică, se zice că formează un triunghi al lui Pitagora sau un triunghi dreptunghi numeric.

Dacă numerele x, y, z sînt prime între ele, se demonstrează că numerele x și y sînt unul par și celălalt impar; dacă x este par, se demonstrează că soluția generală a ultimei ecuații este

$$x = 2ab,\ y = a^2-b^2,\ z = a^2 + b^2$$

în care a este număr întreg par, iar b număr întreg impar.

Cu aceste lămuriri, problema propusă poate fi enunțată sub forma următoare: soluția generală a ecuației diofantice

$$x^2 + z^2 = 2y^2$$

este

$$x = a^2 - 2ab - b^2,\ y = a^2 + b^2,\ z = a^2 + 2ab - b^2,$$

în care a și b sînt numere întregi. De altfel, ultima ecuație se reduce la ecuația pitagorică

$$X^2 + Z^2 = y^2$$

dacă punem

$$X = \frac{z - x}{2} \quad \text{și} \quad Z = \frac{z + x}{2}.$$

Ecuația $x^2 + z^2 = 2y^2$ poartă numele de ecuația lui *Fibonaci* care și-a propus să determine un pătrat perfect și un număr întreg așa fel ca suma acestor două numere să fie un pătrat perfect, iar diferența lor să fie un alt pătrat perfect.

III.47. *Dacă laturile unui triunghi sînt în progresie aritmetică, iar aria lui egală cu patru cincimi din aria triunghiului echilateral avînd același perimetru, să se demonstreze că laturile lui sînt proporționale cu numerele* 7, 10, 13.

Soluție. Laturile a, b, c ale triunghiului fiind în progresie aritmetică (r rația progresiei), pot fi scrise sub forma

$$a = l - r,\ b = l,\ c = l + r,$$

perimetrul lui este $a + b + c = 3l$, deci latura triunghiului echilateral este l; urmează că ariile S și Σ ale celor două triunghiuri sînt date de formulele

$$S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c),\ \Sigma = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

unde

$$2p = a + b + c = 3l,$$

deci

$$p = \frac{3l}{2},\ p - a = \frac{l}{2} + r,\ p - b = \frac{l}{2},\ p - c = \frac{l}{2} - r,$$

de unde deducem

$$S^2 = \frac{3l^2(l^2 - 4r^2)}{16},\ \Sigma^2 = \frac{3l^4}{16}.$$

Prin ipoteză $S = \frac{4\Sigma}{5}$, deci $S^2 = \frac{16\Sigma^2}{25}$, deducem

$$25\,(l^2 - 4r^2) = 16l^2$$

sau $3l = 10\,r$, deci $r = \frac{3l}{10}$, iar lungimilor laturilor triunghiului devin

$$a = l - r = \frac{7l}{10},$$

$$b = l \quad\; = \frac{10l}{10},$$

$$c = l + r = \frac{13l}{10},$$

adică laturile sînt într-adevăr proporţionale cu numerele 7, 10, 13, coeficientul de proporţionalitate fiind $\frac{1}{10}$.

III.48. *Să se calculeze suma numerelor divizibile cu* 16 *şi care sînt cuprinse între* 61 *şi* 6116.

Soluţie. Împărţim numerele 61 şi 6116 cu 16 şi obţinem

$$61 = 16 \cdot 3 + 13,\ 6116 = 16 \cdot 382 + 4.$$

Urmează că cel mai mic multiplu de 16, superior lui 61, este $16 \cdot 4 = 64$, iar cel mai mare multiplu de 16, inferior lui 6116, este $16 \cdot 382 = 6\,112$ Multiplii lui 16, cuprinşi între 61 şi 6116, sînt

$$16 \cdot 4,\ 16 \cdot 5, \ldots, 16 \cdot 382$$

sau

$$64,\ 80, \ldots, 6112.$$

Aceste numere formează o progresie aritmetică, în care primul termen este $a_1 = 64$, ultimul termen este $a_n = 6112$, raţia $r = 16$, iar numărul n al termenilor este dat de formula

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,r,$$

adică

$$6\,112 = 64 + (n - 1)\,16,$$

de unde deducem $n = 379$.

Suma S_n a numerelor din această progresie aritmetică este dată de formula

$$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2} = \frac{379\,(64 + 6\,112)}{2} = 1\,170\,352.$$

IV.

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

IV.1. *Se consideră toate triunghiurile* (T) *în care,* x, y, z *fiind lungimile laturilor, avem relaţia*

$$x = 2(y-z). \qquad (A)$$

Fie $2p$ *perimetrul triunghiului. Se cere:*

1. *Să se determine, în funcţie de* p, *lungimile laturilor acelora din triunghiurile* (T) *care au un unghi drept şi în care* x, *sau* y, *este ipotenuza.*

2. *Între ce limite trebuie să varieze* x *pentru ca, cu mărimile* x, y *şi* z *ce satisfac relaţia* (A), *să se poată forma un triunghi oarecare cu perimetrul* $2p$ *dat.*

3. *Să se studieze variaţia produsului* xyz *cînd* x *variază între limitele găsite.*

4. *Luînd* $p = 12$, *să se determine toate triunghiurile* (T) *ale căror laturi sînt exprimate prin numere naturale.*

Soluţie. 1. Laturile x, y, z ale triunghiurilor căutate satisfac sistemul de trei ecuaţii cu trei necunoscute

$$x = 2(y-z), \quad x+y+z = 2p, \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x = \text{ipotenuza}$$

sau

$$x = 2(y-z), \quad x+y+z = 2p, \quad y^2 = x^2 + z^2, \quad y = \text{ipotenuza}.$$

Din primele două ecuaţii deducem

$$y-z = \frac{x}{2}, \quad y+z = 2p-x$$

şi făcînd semisuma şi semidiferenţa,

$$y = p - \frac{x}{4}, \quad z = p - \frac{3x}{4}.$$

Dacă x este ipotenuza, ecuaţia $x^2 = y^2 + z^2$ devine

$$x^2 = \left(p - \frac{x}{4}\right)^2 + \left(p - \frac{3x}{4}\right)^2,$$

sau

$$3x^2 + 16px - 16p^2 = 0,$$

deci

$$x = \frac{(-8 \pm 4\sqrt{7})\,p}{3}.$$

Reţinem numai rădăcin apozitivă $x = \frac{4(\sqrt{7}-2)\,p}{3}$ şi deducem

$$y = \frac{(5-\sqrt{7})\,p}{3}, \quad z = (3-\sqrt{7})p.$$

Dacă y este ipotenuza, ecuaţia $y^2 = x^2 + z^2$ devine

$$\left(p - \frac{x}{4}\right)^2 = x^2 + \left(p - \frac{3x}{4}\right)^2$$

sau $3x^2 - 2px = 0$ şi cum $x \neq 0$, rămîne $x = \frac{2p}{3}$, iar

$$y = \frac{5p}{6}, \quad z = \frac{p}{2}.$$

Avem două clase de triunghiuri dreptunghice (T):

(T_1), x ipotenuza, $x = \frac{4(\sqrt{7}-2)\,p}{3}$, $y = \frac{(5-\sqrt{7})\,p}{3}$, $z = (3-\sqrt{7})p$;

(T_2), y ipotenuza, $x = \frac{2p}{3}$, $y = \frac{5p}{6}$, $z = \frac{p}{2}$.

2. Într-un triunghi oarecare, o latură este mai mică sau egală cu suma celorlalte două şi mai mare sau egală cu diferenţa lor, egalitatea corespunzînd cazului limită cînd cele trei vîrfuri se află pe aceeaşi dreaptă, deci $y - z \leqslant x \leqslant y + z$ sau făcînd înlocuirile

$$\frac{x}{2} \leqslant x \leqslant 2p - x.$$

Din $x \geqslant \frac{x}{2}$ deducem $x \geqslant 0$, iar din $x \leqslant 2p - x$ deducem $x \leqslant p$, deci x trebuie să se afle între limitele

$$0 \leqslant x \leqslant p.$$

3. Produsul $P = xyz$ devine, înlocuind pe y și z cu valorile lor,

$$P(x) = x\left(p - \frac{x}{4}\right)\left(p - \frac{3x}{4}\right) = \frac{3x^3 - 16px^2 + 16p^2x}{16}.$$

Calculăm derivata

$$P'(x) = \frac{9x^2 - 32px + 16p^2}{16}.$$

Derivata se anulează pentru $x = \frac{4(4 \pm \sqrt{7})p}{9}$; rădăcina $x = \frac{4(4 + \sqrt{7})p}{9}$ trebuie exclusă pentru că altfel x ar fi mai mare ca p, adică în afara intervalului $0 \leqslant x \leqslant p$; rămîne

$$x = \frac{4(4 - \sqrt{7})p}{9}.$$

Cînd x crește și trece prin această valoare, derivata $P'(x)$ trece de la valori pozitive la valoarea zero și apoi la valori negative, deci funcția $P(x)$ admite un maxim egal cu

$$P\left(\frac{4(4 - \sqrt{7})p}{9}\right) = \frac{8p^3(7\sqrt{7} - 10)}{243}.$$

Putem forma tabela de variație

x	0	$\frac{4(4-\sqrt{7})p}{9}$	p
$P'(x)$	$p^2 +$	0	$\frac{-7p^2}{16}$
$P(x)$	0	$\frac{8p^3(7\sqrt{7}-10)}{243}$	$\frac{3p^3}{16}$

4. Triunghiurile *oarecare*, dacă satisfac condiția inițială (A) au laturile

$$x = x, \quad y = p - \frac{x}{4}, \quad z = p - \frac{3x}{4}.$$

Dacă $p = 12$,

$$x = x, \quad y = 12 - \frac{x}{4}, \quad z = 12 - \frac{3x}{4}.$$

Condiția necesară și suficientă ca x, y, z să fie numere naturale este ca x să fie multiplu de 4, $x = 4k$, deci

$$x = 4k,\ y = 12-k,\ z = 12-3k.$$

Însă am văzut la punctul 2 că aceste trei numere sînt laturile unui triunghi oarecare cu perimetrul $2p$, dacă $0 \leqslant x \leqslant p$, deci $0 \leqslant x \leqslant 12$ sau $0 \leqslant k \leqslant 3$ și cum k este un număr natural, rezultă următoarele cazuri posibile

$$k = 1,\ k = 2,\ k = 3.$$

În cazul $k = 1$, avem $x = 4$, $y = 11$, $z = 9$, iar în cazul $k = 2$, avem $x = 8$, $y = 10$, $z = 6$. În cazul $k = 3$, avem $x = 12$, $y = 9$, $z = 3$; în acest caz $x = y + z$ și deci toate vîrfurile sînt pe o aceeași dreaptă.

Dintre aceste triunghiuri *oarecare*, cu laturile egale cu numere naturale, trebuie alese triunghiurile dreptunghice (T); dacă astfel de triunghiuri există, ele sînt de clasa (T_2), în care y este ipotenuza, pentru că în ambele cazuri y este cea mai mare dintre laturi ; triunghiurile (T_2) există dacă $y^2 = x^2 + z^2$, adică

$$11^2 = 4^2 + 9^2,\ 10^2 = 8^2 + 6^2.$$

Prima egalitate nu este adevărată pentru că $121 \neq 97$, a doua egalitate este adevărată pentru că $100 = 64 + 36$, deci în cazul considerat există un singur triunghi dreptunghi (T) cu laturile egale cu numere naturale și anume triunghiul cu laturile

$$x = 8,\ y = 10,\ z = 6.$$

IV.2. *Un proiectil cade pe verticală de la înălțimea de* 1 800 m, *fără viteză inițială.*

Să se împartă această înălțime în trei porțiuni astfel ca timpurile de parcurgere ale acestor porțiuni să fie egale între ele (*nu se ține seama de rezistența aerului*).

Să se generalizeze.

Soluție 1. Proiectilul cade din O pe verticala Os; fie M poziția lui după t secunde și fie $OM = s$ drumul parcurs ; ecuația mișcării este

$$S = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + S_0,$$

în care viteza inițială $v_0 = 0$ și $s_0 = 0$ pentru că M pornește din originea O, deci

$$s = \frac{1}{2} gt^2,$$

adică *drumul parcurs este proporțional cu pătratul timpului.*

Fie l_1, l_2, l_3 lungimile celor trei segmente și fie $s_1 = l_1$, $s_2 = l_1 + l_2$, $s_3 = l_1 + l_2 + l_3$; spațiul $s_1 = l_1$ este parcurs în t_1 secunde, spațiul $s_2 = l_1 + l_2$ în $t_1 + t_1 = 2t_1$ secunde, iar spațiul $s_3 = l_1 + l_2 + l_3$ în $t_1 + t_1 + t_1 = 3t_1$ secunde, de unde deducem , ținînd seama că $l_1 + l_2 + l_3 = 1\,800$ m,

$$\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{s_2}{4t_1^2} = \frac{s_3}{9t_1^2}$$

sau

$$\frac{l_1}{1} = \frac{l_1 + l_2}{4} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{9} = 200 \text{ m},$$

deci

$$l_1 = 200 \text{ m}, \; l_2 = 600 \text{ m}, \; l_3 = 1000 \text{ m}.$$

2. Problema poate fi generalizată; fie H înălțimea de la care cade un proiectil fără viteză inițială; să se împartă H în n porțiuni astfel ca timpurile de parcurgere să fie egale între ele. Dacă notăm cu l_1, $l_2, \ldots, l_n$ cele n porțiuni, un raționament analog cu cel de mai sus conduce la sistemul

$$\frac{l_1}{1^2} = \frac{l_1 + l_2}{2^2} = \ldots = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n^2} = \frac{H}{n^2}$$

de unde deducem

$$l_1 = \frac{H \cdot 1^2}{n^2}, \quad l_2 = \frac{H(2^2 - 1^2)}{n^2}, \quad l_3 = \frac{H(3^2 - 2^2)}{n^2}, \ldots$$

Ca verificare, suma $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = H$.

IV.3. *Se consideră funcția*

$$y = x^5 - 5 \cos \alpha \cdot x^4 + 5x^3 + \lambda = f(x),$$

α și λ fiind niște parametri reali, și se cere:

1. *Presupunînd $\alpha = 0$ și $\lambda = 1$, să se construiască curba reprezentativă a funcției, deducînd din variația ei numărul ră-*

dăcinilor reale ale ecuației $f(x) = 0$, *stabilind aproximativ pozițiile lor pe axa* Ox.

2. *Să se determine ce valori trebuie să ia* α *în cazul general, pentru ca* y *să nu aibă nici maxime, nici minime.*

3. *Dacă* α *este nul, pentru ce valori ale lui* λ *ecuația* $f(x) = 0$ *nu are decît o singură rădăcină reală?*

Soluție. 1. Pentru $\alpha = 0$ și $\lambda = 1$, funcția $f(x)$ devine

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 = f(x).$$

Derivatele y' și y'' sînt

$$y' = 5x^2(x^2 - 4x + 3),\ y'' = 2x\,(2x^2 - 6x + 3).$$

Ecuația $y' = 0$ are o rădăcină dublă egală cu zero și două rădăcini reale și diferite 1 și 3.

Ecuația $y'' = 0$ are trei rădăcini reale și diferite:

0; $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, deci diagrama de ecuație $y = f(x)$ are trei puncte de inflexiune.

Șirul lui *Rolle* este (am suprimat rădăcina dublă a derivatei)

$f(-\infty)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(+\infty)$
$-\infty$	2	-26	$+\infty$

de unde deducem că ecuația $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale cuprinse în intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.

Acest lucru se poate vedea și din reprezentarea grafică a funcției: cînd x crește de la $-\infty$ la 1, derivata $f'(x)$ este pozitivă și funcția y crescătoare de la $-\infty$ la 2, deci în acest interval diagrama taie axa Ox o dată; cînd x crește de la 1 la 3, derivata $f'(x)$ este negativă și funcția y descrescătoare de la 2 la -26, deci în acest interval diagrama taie axa Ox o dată; cînd x crește de la 3 la $+\infty$, derivata $f'(x)$ este pozitivă și funcția y crește de la -26 la $+\infty$, deci în acest interval diagrama taie axa Ox odată.

Diagrama are tangentele orizontale în punctele A (0, 1), B (1,2), C(3,$-$26). Tangenta este staționară (traversează diagrama) în A, care este un punct de inflexiune; B este un punct de maxim, iar C un punct de minim al funcției.

Celelalte două puncte de inflexiune ale diagramei sînt D, pe arcul AB şi E, pe arcul BC (fig. 41).

Putem micşora intervalele în care se găsesc cele trei rădăcini reale x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $f(x) = 0$, calculînd $f(-1) = -10$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = -7$, $f(3) = -26$, $f(4) = 65$, deci

$$-1 < x_1 < 0,\ 1 < x_2 < 2,\ 3 < x_3 < 4.$$

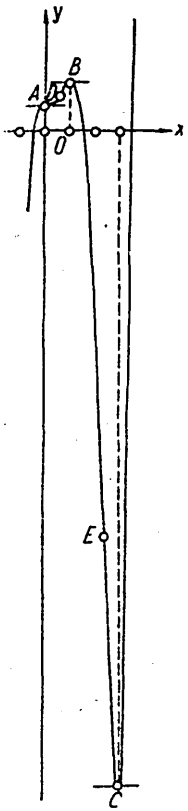


Fig. 41

Împărţim mai departe fiecare din aceste trei intervale în 10 părţi egale şi calculăm valorile lui $f(x)$ în punctele de diviziune; se găseşte:

$f(-0,6) = -0,805\ 72$, $f(-0,5) = +0,031\ 25$

deci

$$-0,6 < x_1 < -0,5.$$

Împărţim şi acest interval în 10 părţi egale şi avem

$f(-0,51) = -0,036\ 01$, $f(-0,50) = +0,031\ 25$

deci

$$-0,51 < x_1 < -0,50.$$

La fel se găseşte

$f(1,51) = +0,043\ 75$, $f(1,52) = -0,017\ 01$

deci

$$1,51 < x_2 < 1,52.$$

La fel se găseşte

$f(3,60) = -0,866\ 24$, $f(3,61) = +0,157\ 87$

deci

$$3,60 < x_3 < 3,61.$$

Deci prin simple încercări am calculat cele trei rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$ cu o aproximaţie de 0,01. Dacă s-ar fi cerut să le calculăm cu o mai bună aproximaţie, am fi aplicat metoda coardei (a părţilor proporţionale), sau metoda tangentei (a lui Newton) sau metoda iteraţiei (a aproximaţiilor succesive).

2. În cazul general, adică α şi λ oarecare, derivata y' este

$$y' = 5x^2\ (x^2 - 4x \cos \alpha + 3).$$

Funcția $f(x)$ nu admite nici maxime, nici minime, dacă $y' \geqslant 0$, adică dacă trinomul $x^2 - 4x \cos \alpha + 3$ are rădăcinile egale sau imaginare, adică discriminantul $16 \cos^2\alpha - 12 \leqslant 0$, de unde deducem $\cos^2\alpha \leqslant \frac{3}{4}$ sau $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \cos\alpha \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$; această dublă inegalitate este satisfăcută dacă $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$ sau în general

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{6} + k\pi.$$

3. Dacă $\alpha = 0$, iar λ oarecare, ecuația

$$f'(x) = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

are rădăcinile 1 și 3 reale simple și o rădăcină reală dublă. Șirul lui *Rolle* este (am suprimat rădăcina dublă a derivatei)

$$\begin{array}{cccc} f(-\infty) & f(1) & f(3) & f(+\infty) \\ -\infty & \lambda + 1 & \lambda - 27 & +\infty. \end{array}$$

Acest șir are trei intervale, deci ecuația $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale, dacă $\lambda + 1 > 0$ și $\lambda - 27 < 0$, adică $-1 < \lambda < 27$; sau o singură rădăcină reală, dacă $\lambda + 1$ și $\lambda - 27$ sînt de același semn, adică produsul $(\lambda + 1)(\lambda - 27) > 0$, deci $\lambda < -1$ sau $\lambda > 27$.

Ce se întîmplă dacă $\lambda = -1$ sau $\lambda = 27$? Dacă $\lambda = -1$, avem $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) \neq 0$, deci 1 este o rădăcină dublă a ecuației $f(x) = 0$, iar între 3 și ∞, avem încă o rădăcină simplă, pentru că $f(3) = -28 < 0$, $f(+\infty) = +\infty > 0$. Dacă $\lambda = 27$, avem $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f''(3) \neq 0$, deci 3 este o rădăcină dublă a ecuației $f(x) = 0$, iar între $-\infty$ și 1 avem încă o rădăcină simplă, pentru că $f(-\infty) = -\infty < 0$, $f(1) = 28 > 0$.

În rezumat, ecuația $f(x) = 0$, pentru $\alpha = 0$, are o rădăcină reală și una singură dacă

$$\lambda < -1 \text{ sau } 27 < \lambda.$$

IV.4. *Dintr-un balon, care se înalță în direcție verticală cu o viteză constantă de* 10 *m/s, se dă drumul de la o anumită înălțime unei încărcături la care este atașată o mică cantitate de explosibil pentru a marca căderea pe pămînt, iar după* 12 s *unei a doua încărcături, ambele avînd viteza inițială zero față de pămînt. Operatorii din nacelă aud explozia primei încărcături după* 15 s *de la lansarea ei.*

Se cere să se determine înălțimea de la care a fost lansată prima încărcătură, precum și intervalul de timp scurs între cele două explozii.

(*Viteza sunetului se va calcula cu* 332 m/s *și accelerația gravitațională cu* 9,81 m/s^2. *Nu se va ține seamă de rezistența aerului și de eventualele diferențe de temperatură.*)

Soluție. Să notăm cu t_1 timpul scurs de la lansarea primei încărcături pînă la producerea exploziei, iar cu s_1 spațiul parcurs de ea în acest interval de timp. Avem formula

$$s_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} 9{,}81 t_1^2 \text{ m.}$$

În momentul cînd se *aude* explozia primei încărcături, balonul se află la înălțimea

$$s_1 + 15 \times 10 = (4{,}905\ t_1^2 + 150) \text{ m.}$$

Timpul necesar sunetului pentru a ajunge la operatorii din nacelă este $(15 - t_1)$ s, deci înălțimea la care se află balonul, în momentul cînd se aude din el sunetul primei explozii, se poate calcula și cu formula $332\ (15 - t_1)$. Deci putem scrie

$$4{,}905\ t_1^2 + 150 = 332\ (15 - t_1), \text{ sau}$$
$$4{,}905\ t_1^2 + 332\ t_1 - 4830 = 0.$$

Rădăcina pozitivă t_1 a acestei ecuații este

$$\frac{-166 + \sqrt{166^2 + 4830 \times 4{,}905}}{4{,}905} = \frac{-166 + \sqrt{51247{,}15}}{4{,}905} =$$
$$= \frac{-166 + 226{,}378}{4{,}905} = \frac{60{,}378}{4{,}905} = 12{,}309 \text{ s.}$$

Înălțimea de la care a fost lansată prima încărcătură este

$$s_1 = 4{,}905 \times (12{,}309)^2 = 743{,}164 \text{ m.}$$

Înălțimea de la care a fost lansată a doua încărcătură este

$$s_2 = s_1 + 12 \times 10 = 863{,}164 \text{ m.}$$

De altă parte, dacă însemnăm cu t_2 timpul scurs de la lansarea celei de a doua încărcături pînă la *producerea* exploziei, avem

$$s_2 = 863{,}164 = 4{,}905\ t_2^2,$$
$$t_2 = \sqrt{\frac{863{,}164}{4{,}905}} = \sqrt{175{,}97} = 13{,}266 \text{ s.}$$

Să însemnăm cu T_2 timpul scurs de la lansarea celei de a doua încărcături pînă la *auzirea* exploziei, din balon. În momentul cînd se aude din balon explozia ei, balonul se găseşte la înălţimea

$$s_2 + 10T_2 = 863{,}164 + 10T_2 \text{ m.}$$

Timpul necesar sunetului exploziei celei de a doua încărcături ca să să ajungă la operatorii din nacelă, este :

$$T_2 - t_2 = T_2 - 13{,}266 \text{ s.}$$

Deci putem scrie egalitatea :

$$863{,}164 + 10T_2 = 332\ (T_2 - 13{,}266),$$

de unde deducem

$$T_2 = 16{,}358 \text{ s.}$$

De la lansarea primei încărcături pînă la auzirea exploziei au trecut 15 s ; de la lansarea primei încărcături pînă la auzirea exploziei celei de a doua a trecut (12 + 16,358) s. Deci intervalul de timp scurs între cele două explozii este

$$12 + 16{,}358 - 15 = 13{,}358 \text{ s.}$$

IV.5. *Se consideră şirul de numere x_n definit prin relaţia de recurenţă*

$$x_1^2 = px_0 + q,\quad x_2^2 = px_1 + q, \ldots, x_m^2 = px_{m-1} + q,$$

p, q, x_0 fiind numere pozitive, iar pentru x_n luîndu-se valori pozitive.

1. *Să se arate că acest şir este crescător sau descrescător după cum x_0 este mai mic sau mai mare decît rădăcina pozitivă a ecuaţiei*

$$x^2 - px - q = 0.$$

2. *Să se găsească limita acestui şir.*
3. *Să se interpreteze în modul acesta limita expresiei*

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

Soluţie. 1. Pentru ca şirul să fie crescător, trebuie ca $x_{m+1} > x_m$ sau (deoarece $x_n > 0$), $x_{m+1}^2 > x_m^2$, pentru toate valorile întregi şi pozitive ale lui m.

Ţinînd seama de relaţia de recurenţă, această inegalitate se mai scrie $px_m + q > x_m^2$, $x_m^2 - px_m - q < 0$.

Această inegalitate fiind valabilă pentru toate valorile lui m, întregi și pozitive, putem face $m = 0$, și căpătăm $x_0^2 - px_0 - q < 0$.

Această inegalitate atrage după sine

$$\frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 + 4q}\right) < x_0 < \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right);$$

dar $x_0 > 0$, iar $\frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 + 4p}\right) < 0$, deci rămîne

$$x_0 < \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right).$$

Așadar, dacă șirul este crescător, x_0 este mai mic decît rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 - px - q = 0$.

Reciproc, dacă x_0 este mai mic decît rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 - px - q = 0$, adică $x_0 < \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right)$, rezultă că $x_0^2 - px_0 - q < 0$, sau $x_0^2 < px_0 + q$, sau $x_0^2 < x_1^2$, $x_1 > x_0$.

Din ultima inegalitate, deducem $px_1 + q > px_0 + q$, sau

$$x_2^2 > x_1^2, \quad x_2 > x_1 > x_0.$$

Din aproape în aproape deducem $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, deci șirul este în acest caz crescător.

Dacă șirul este descrescător, avem $x_{m+1} < x_m$, $x_{m+1}^2 < x_m^2$, pentru toate valorile întregi și pozitive ale lui m. Ultima inegalitate se mai scrie

$$px_m + q < x_m^2, \text{ sau } x_m^2 - px_m - q > 0.$$

Făcînd aici $m = 0$, obținem $x_0^2 - px_0 - q > 0$,

deci sau $x_0 < \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 + 4q}\right)$,

sau

$$x_0 > \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right).$$

Prima inegalitate nu este acceptabilă, căci $x_0 > 0$.

Rămîne $x_0 > \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right)$; în cazul cînd șirul descrește, x_0 este deci mai mare decît rădăcina pozitivă a ecuației

$x^2-px-q=0$. Reciproc, dacă această condiție de inegalitate este verificată, înseamnă că $x_0^2-px_0-q>0$, $x_0^2>px_0+q$, $x_0^2>x_1^2$, $x_0>x_1$.

Din ultima inegalitate se deduce $px_0+q>px_1+q$, $x_1^2>x_2^2$, $x_1>x_2$. Din aproape în aproape se deduce $x_0>x_1>x_2>\ldots>x_m$, adică în acest caz șirul este descrescător.

2. Dacă șirul este crescător, am văzut că

$$x_m^2-px_m-q<0, \text{ deci } x_m<\frac{1}{2}\left(p^2+\sqrt{p^2+4q}\right),$$

adică termenii șirului nu cresc peste orice limită, șirul este *mărginit superior*, deci are o limită mai mică sau egală cu

$$\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2+4q}\right).$$

Dacă șirul este descrescător, am văzut că

$$x_m^2-px_m-q>0, \text{ deci } x_m>\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2+4q}\right),$$

adică termenii șirului nu descresc sub orice limită, șirul este *mărginit inferior*, deci are o limită mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2+4q})$.

Așadar, fie că este crescător, fie că este descrescător, șirul dat este convergent și are ca limită pe $l=\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2+4q}\right)$, rădăcina pozitivă a ecuației $l^2=pl+q$, obținută făcînd pe m să tindă către infinit, în relația de recurență.

3. Observăm că

$$x_1=\sqrt{q+px_0},\ x_2=\sqrt{q+px_1}=\sqrt{q+p\sqrt{q+px_0}};$$

$$\ldots;\ x_m=\sqrt{q+p\sqrt{q+p\sqrt{q+\ldots+p\sqrt{q+px_0}}}},$$

în expresia lui x_m numărul radicalilor fiind m.

Pentru $x_0=0$, $p=1$, $q=2$ obținem șirul

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots,\ x_m=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}.$$

După cele spuse mai sus, acest șir este crescător, căci $x_0 = 0$ este mai mic decît 2, rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.

Limita șirului este egală cu $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+8}\right) = 2$.

IV.6. *Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații*

$$x + by + z = 1, \quad ax + y + dz = 1, \quad x + cy + z = 1.$$

Soluție. Să rezolvăm sistemul cu regula lui *Cramer*. Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & d \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-d)(c-b), \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & d \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (1-d)(c-b),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(c-b).$$

Vom face acum mai multe ipoteze asupra lui a, b, c, d: $c \neq b$, $a \neq d$, în acest caz sistemul admite soluția

$$x = \frac{1-d}{a-d}, \; y = 0, \; z = \frac{a-1}{a-d}.$$

$c \neq b$, $a = d \neq 1$, *sistemul este imposibil.* El este reductibil la forma $x + by + z = 1$, $x + \frac{y}{a} + z = \frac{1}{a}$, $x + cy + z = 1$ ($a = d \neq 0$) și cum $y = 0$, rezultă imposibilitatea $x + z = 1$, $x + z = \frac{1}{a \neq 1}$; sau la forma

$$x + by + z = 1, \; y = 1, \; x + cy + z = 1 \quad (a = d = 0)$$

și cum $y = 0$, rezultă imposibilitatea $0 = 1$.

(Sistemul admite în acest caz soluția improprie

$$x = \pm\infty, \; y = 0, \; z = \mp\infty).$$

$c \neq b$, $a = d = 1$, *sistemul este nedeterminat*, căci avem $y = 0$, iar x și z sînt determinați de o singură ecuație $x + z = 1$.

$c \neq b$, $a \neq d = 1$, sistemul admite în acest caz soluția

$$x = 0, \; y = 0, \; z = 1.$$

$c \neq b$, $d \neq a = 1$, sistemul admite soluția $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

$c = b$, *sistemul este nedeterminat*, căci prima ecuație este identică cu a treia.

IV.7. *Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații* $ax+by+cz=b+c$, $bx+cy+az=c+a$, $cx+ay+bz=a+b$.

Soluție. Să rezolvăm sistemul cu ajutorul determinanților. Calculăm cei patru determinanți care intră în expresiile lui x, y, z,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=(a+b+c)\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ c+a & c & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}=0;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ b & c+a & a \\ c & a+b & b \end{vmatrix}=(a+b+c)\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2);$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a & b & b+c \\ b & c & c+a \\ c & a & a+b \end{vmatrix}=(a+b+c)\,(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2);$$

Discuție. Dacă $a+b+c\neq 0$ $a\neq b\neq c$, avem soluția

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=0,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=1,\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=1.$$

Dacă $a+b+c=0$ sau dacă $a=b=c$, sistemul este nedeterminat. În adevăr, în primul caz, însemnînd cu $E_1=0$, $E_2=0$, $E_3=0$ cele trei ecuații, avem

$$E_1+E_2+E_3=(a+b+c)\,(x+y+z)-2\,(a+b+c)=0,$$

$$E_1+E_2+E_3=0,$$

deci cele trei ecuații nu sînt independente, sistemul este nedeterminat.

În al doilea caz, $a=b=c\neq 0$, sistemul se reduce la o singură ecuație $x+y+z=2$, deci este nedeterminat.

Dacă $a=b=c=0$ sistemul de asemenea este nedeterminat, căci este verificat pentru orice valori date lui x, y, z.

IV.8. *Un sector sferic, de volum dat, aparține unei sfere de rază necunoscută; să se determine raza sferei și unghiul sectorului, astfel ca aria totală să fie maximă.*

Soluție. Fie x raza sferei, iar α unghiul sectorului plan care dă naștere sectorului sferic.

Aria totală a sectorului sferic se compune din aria calotei care-i serveşte ca bază şi din aria conului care are ca bază, baza calotei şi ca vîrf centrul sferei.

Înălţimea calotei este $x - x\cos\frac{\alpha}{2} = 2x\sin^2\frac{\alpha}{4}$, iar aria calotei este $4\pi x^2\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

Raza conului este $x\sin\frac{\alpha}{2}$, iar aria laterală a conului este $\pi x^2\sin\frac{\alpha}{2}$. Deci aria totală a sectorului sferic este

$$S = \pi x^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

Volumul sectorului sferic este

$$\left(4\pi x^2\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)\frac{x}{3} = \frac{4}{3}\pi x^3\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Scriind că acest volum este egal cu constanta $\frac{4}{3}\pi a^3$, avem

$$x^3\sin^2\frac{\alpha}{4} = a^3.$$

Acum avem de studiat variaţia funcţiei $y = \pi x^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{4} + \right.$ $\left. + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$, α şi x fiind legaţi prin relaţia $x^2\sin^2\frac{\alpha}{4} = a^3$.

Din a doua relaţie deducem $\sin\frac{\alpha}{4} = \pm\left(\frac{a}{x}e\right)^{\frac{3}{2}}$ şi cum $\alpha < 360°$, $\frac{\alpha}{4} < 90°$, $\sin\frac{\alpha}{4} > 0$, vom lua

$$\sin\frac{\alpha}{4} = +\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Valoarea corespunzătoare pentru y este, după ce înlocuim

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{4}},$$

$$y = \frac{2\pi a\sqrt{a}\,(2a\sqrt{x} + \sqrt{x^3 - a^3})}{x}.$$

Derivata y' are valoarea

$$y' = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}\,(x^3 + 2a^3 - 4a\sqrt{a}\sqrt{x^3 - a^3})}{x^2\sqrt{x^3 - a^3}}$$

şi se anulează pentru valorile lui x egale cu rădăcinile ecuaţiei iraţionale

$$x^3 + 2a^3 - 4a\sqrt{a}\sqrt{x^3 - a^3} = 0.$$

Izolînd radicalul şi ridicînd la patrat, ecuaţia devine

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6 = 0$$

care are rădăcinile $x_1^3 = 10a^3$, $x_2^3 = 2a^3$. Singurele rădăcini reale sînt $x_1 = a\sqrt[3]{10}$ şi $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Pentru $x = x_1$, derivata se anulează trecînd de la minus la plus, deci această valoare dă un minim, pentru $x = x_2$ avem un maxim a cărui valoare este $3a^2\sqrt[3]{4}$.

Unghiul α este dat de relaţia $\sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{a^3}{x^3} = \frac{a^3}{2a^3} = \frac{1}{2}$,

$$\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ deci } \frac{\alpha}{4} = 45°, \ \alpha = 180°.$$

IV.9. *Ce legătură trebuie să existe între constantele a şi b pentru ca valorile maximă y_1 şi minimă y_2 ale funcţiei*

$$y = \frac{[x^2 + 2(a - b)x + b^2 - 2ab + 1]}{x^2 + 1 - b^2}$$

să satisfacă condiţia $y_1 + y_2 = 0$? Să se calculeze y_1 şi y_2 şi să se figureze variaţia lui y cînd $b = 5$.

Dacă PQ este o coardă paralelă cu Ox şi M mijlocul ei, între distanţele MM' şi OM' la Ox şi Oy, avem

$$MM' = 1 - \frac{24}{5 \times OM'}.$$

Ce curbă descrie M?

Soluţie. Derivata funcţiei y este

$$y' = \frac{2(b - a)(x^2 - 2bx + b^2 - 1)}{(x^2 + 1 - b^2)^2}.$$

Această derivată se anulează pentru valorile $x = b \pm 1$. Dacă $b > a$, atunci valoarea y_1 corespunzătoare lui $x = b-1$ este un *maxim* a cărui valoare este $y_1 = \frac{1-a}{1-b}$; cealaltă valoare y_2, corespunzătoare la $x = b + 1$ este în acest caz un *minim* a cărui valoare este $y_2 = \frac{1+a}{1+b}$. Dacă $b < a$, atunci y_1 este un *minim*, iar y_2 este un *maxim*.

Condiția $y_1 + y_2 = 0$ devine $\frac{1-a}{1-b} + \frac{1+a}{1+b} = 0$ și efectuînd calculele, $ab = 1$.

Dacă $b = 5$, atunci $a = \frac{1}{5}$ și y devine

$$y = \frac{5x^2 - 48x + 120}{5(x^2 - 24)}.$$

Variația acestei funcții se face cu ușurință. Curba are trei asimptote, paralele cu axele de coordonate $y = 1$, $x = \pm 2\sqrt{6}$.

Există un punct de *maxim* $\alpha\left(4, -\frac{1}{5}\right)$ și un punct de *minim* $\beta\left(6, \frac{1}{5}\right)$. Curba nu taie axa Ox la distanță finită, dar taie axa Oy în punctul $(0, -1)$.

Curba pleacă asimptotă la $y = 1$ dinspre x negativ și urcă asimptotă la dreapta $x = -2\sqrt{6}$; a doua ramură pornește asimptotă tot dreptei $x = -2\sqrt{6}$, urcă în punctul $(0, -1)$, apoi în punctul maxim α și apoi coboară asimptotă dreptei $x = 2\sqrt{6}$; a treia ramură coboară asimptotă la dreapta $x = 2\sqrt{6}$, taie asimptota $y = 1$, în punctul $(5, 1)$, coboară în punctul minim β, apoi urcă asimptotă dreptei $y = 1$, spre x pozitiv. Ramura întîia și a treia sînt în afara fîșiei formată de asimptotele $x = \pm 2\sqrt{6}$, a doua ramură este în interiorul acestei fîșii.

Fie $y = MM'$ ecuația coardei PQ; coordonatele x ale punctelor P, Q sînt rădăcinile ecuației

$$MM' = \frac{5x^2 - 48x + 120}{5(x^2 - 24)}.$$

OM', adică x-ul punctului M, este semisuma rădăcinilor acestei ecuații. Ordonînd această ecuație după puterile lui x, avem

$$5(MM'-1)x^2+48x-120(MM'+1)=0,$$

de unde $OM'=\frac{24}{5(1-MM')}$ sau $MM'=1-\frac{24}{5OM'}$.

Coordonatele punctului M sînt $x=OM'$, $y=MM'$. Locul geometric al punctului M este deci curba $y=1-\frac{24}{5x}$, sau $5x(y-1)+24=0$, care reprezintă o hiperbolă echilateră cu asimptotele $x=0$, $y=1$ și trecînd prin punctele α și β. Acest lucru era de prevăzut, căci tangentele în α și β la curba dată sînt coarde PQ paralele cu Ox și pentru care punctul M' se confundă cu α și β respectiv.

IV.10. *Să se afle locul geometric descris de un proiectil ce se mișcă astfel: proiecția lui pe orizontală are o mișcare rectilinie cu viteza de* 600 m/s, *iar proiecția lui pe verticală o descrie după legea căderii corpurilor în vid, fiind aruncat în sus cu o viteză de* 300 m/s.

Să se afle ce cotă va avea proiectilul după ce a parcurs 30 km *în proiecție orizontală.*

Cu ce unghi se mai poate atinge același punct (cu aceeași viteză inițială)?

Soluție. Fie Oxy planul în care se mișcă proiectilul, originea O este poziția inițială a proiectilului, axa Ox orizontală, iar Oy verticala ascendentă. Fie v_0 mărimea vitezei și fie α unghiul pe care-l face, cu Ox, vectorul viteză inițială; proiecțiile acestui vector pe Ox și Oy sînt respectiv $v_0\cos\alpha$ și $v_0\sin\alpha$. Prin ipoteză

$$v_0\cos\alpha=600 \text{ m/s}, \quad v_0\sin\alpha=300 \text{ m/s}.$$

Deducem prin ridicare la pătrat și adunare,

$$v_0^2=600^2+300^2=360\,000+90\,000=450\,000, \quad v_0=300\sqrt{5} \text{ m/s}.$$

Prin împărțire deducem $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}=\frac{300}{600}=\frac{1}{2}$.

Fie M poziția proiectilului după t secunde de la aruncarea lui și fie x, y coordonatele lui M; dacă P și Q sînt proiecțiile punctului M respectiv pe Ox și Oy, coordonatele lui P și Q sînt

$$P(x,\ 0). \quad Q(0,\ y).$$

Prin ipoteză, mişcarea punctului P este uniformă, cu viteza de 600 m/s, ecuaţia mişcării lui este deci $x = 600t + x_0$, unde x_0 este o constantă; dar în momentul iniţial, P este în origină, deci pentru $t = 0$ avem $x=0$, iar ecuaţia mişcării lui P se reduce la $x = 600$ t, în care t este măsurat în secunde, iar x în metri.

Prin ipoteză, mişcarea punctului Q este uniform variată, acceleraţia fiind egală cu $-g = -9{,}81$ m/s^2 (acceleraţia este negativă pentru că forţa gravitaţională este îndreptată către y negativ), iar viteza iniţială egală cu 300 m/s; ecuaţia mişcării punctului Q este deci

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b,$$

unde a şi b sînt două constante; deducem că viteza punctului Q este $\frac{dy}{dt} = -gt + a$. Dar în momentul iniţial punctul Q este în origine şi viteza lui iniţială este egală cu 300 m/s, deducem din ultimele două ecuaţii, făcînd $t = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 300$ m/s, $g = 9{,}81$ m/s^2, că $a = 300$ m/s, $b = 0$, deci ecuaţia mişcării punctului Q este $y = \frac{1}{2} \times 9{,}81t^2 + 300t$, în care t este măsurat în secunde, iar y în metri.

Ecuaţiile $x = 600\ t, y = -\frac{1}{2} \times 9{,}81 + 300\ t$ definesc mişcarea proiectilului M; dacă eliminăm parametrul t, obţinem $y = \frac{x}{2} - \left(\frac{9{,}81}{720\,000}\right) x^2$, aceasta este traiectoria proiectilului; ea este o parabolă cu axa verticală, trece prin origine şi are concavitatea îndreptată către y negativ.

Pentru $x = 30$ km $= 30\,000$ m, deducem

$$y = 15\,000 - \frac{9{,}81 \times 9 \times 10^8}{72 \times 10^4} = 15\,000 - 12\,262{,}5 = 2\,737{,}5 \text{ m},$$

deci după ce proiectilul a parcurs 30 km în proiecţie orizontală, cota lui este egală cu 2 737,5m.

Pentru a răspunde la ultima parte a problemei, considerăm cazul general; fie v_0 mărimea vectorului viteză iniţială şi fie α unghiul lui cu Ox. Raţionamentul de mai sus conduce la

$$x = (v_0 \cos \alpha)\, t,\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)\, t;$$

acestea sînt ecuațiile mișcării proiectilului M; dacă eliminăm parametrul t, deducem

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \qquad (1)$$

aceasta este ecuația traiectoriei, o parabolă.

Fiind dat un punct M, de coordonate x, y, putem determina unghiul α așa fel ca traiectoria (1) să treacă prin el? Și dacă

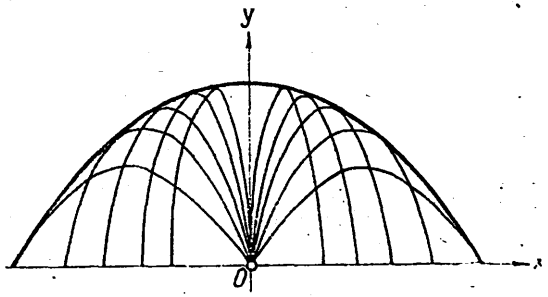


Fig. 42

problema este posibilă, există una sau mai multe soluții? Pentru a răspunde la chestiune, va trebui să rezolvăm ecuația (1) în raport cu necunoscuta α, toate celelalte litere însemnînd numere date. Pentru aceasta punem $m = tg\,\alpha$, deducem $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + m^2$ și ultima ecuație devine

$$y = mx - \frac{(m^2+1)\,gx^2}{2v_0^2} \text{ sau } m^2 - \frac{v_0^2}{gx} m + 1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} = 0. \qquad (2)$$

Ecuația (2) este de gradul al doilea în raport cu m, discriminantul ei Δ este dat de

$$\frac{gx^2}{8v_0^2} \Delta = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y.$$

Rădăcinile ecuației (2) sînt: reale și distincte dacă $\Delta > 0$; reale și egale dacă $\Delta = 0$; imaginare dacă $\Delta < 0$.

Semnul lui Δ depinde de poziția punctului $M(x, y)$ față de parabola numită *parabolă de siguranță* (fig. 42),

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0} + \frac{v_0^2}{2g} \qquad (3)$$

și anume $\Delta > 0$ sau $= 0$ sau < 0 după cum M se găsește respectiv în interiorul parabolei (3) sau pe ea sau în afara

Cu alte cuvinte, printr-un punct M, *ales arbitrar în interiorul* parabolei de siguranță, trec *două traiectorii* (1); printr-un punct M, *ales arbitrar* pe parabola de siguranță, trece *traiectorie unică* (1) (tangentă în M la parabola de siguranță); în fine, printr-un punct *ales arbitrar în afara* parabolei de siguranță, nu trece *nici o traiectorie* (1).

Pentru $x = 30\,000$, $y = 2\,737{,}5$, $v_0 = 300\sqrt{5}$, $g = 9{,}81$, avem

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y = \frac{450\,000}{19{,}62} - \frac{9{,}81 \times 9 \times 10^8}{9 \times 10^5} - 2\,737{,}5 > 0$$

adică punctul $x = 30\,000$, $y = 2\,737{,}5$ se găsește în interiorul parabolei de siguranță, deci prin el trec două traiectorii (1), fie m_1 și m_2 valorile lui m corespunzătoare, ele sînt rădăcinile ecuației (2); suma rădăcinilor este $m_1 + m_2 = \frac{2v_0^2}{gx}$, dar m_1 corespunde traiectoriei date, $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2}$, deci

$$m_2 = \frac{2v_0^2}{gx} - m_1 = \frac{9 \times 10^5}{9{,}81 \times 3 \times 10^4} - \frac{1}{2} = \frac{5019}{1962}.$$

Fie α_2 unghiul corespunzător, $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{5019}{1962}$. Tabelele dau

$$\alpha_1 = 26^0 33' 54'' \text{ și } \alpha_2 = 68^0 38' 55''.$$

IV.11. *În raport cu două axe perpendiculare, Ox și Oy, se consideră curbele reprezentate de ecuațiile*

$$1)\ y^2 = 4x \text{ și } (2)\ y^2 = \frac{4(x-2)^3}{27}.$$

1. *Să se determine intervalele unde există aceste curbe și să se găsească coordonatele punctelor de intersecție.*
2. *Să se calculeze aria limitată între aceste două curbe.*

Ecuația (1) reprezintă o parabolă de parametru $p = 2$, avînd pe Ox ca axă și pe Oy ca tangentă în vîrf. Toate punctele ei sînt de partea x-ilor pozitivi.

Ecuația (2) reprezintă o curbă de gradul al treilea, simetrică în raport cu axa Ox. Toate punctele curbei sînt la dreapta dreptei $x - 2 = 0$, căci numai pentru $x \geqslant 2$ membrul al doilea

al ecuației (2) este pozitiv (ca și membrul întîi). Pentru a o construi, vom rezolva ecuația (2) în raport cu y și avem $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{(x-2)^3}$.

Derivata este $y' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x-2}$ și se anulează pentru $x = 2$, rămînînd tot timpul pozitivă. Deci curba nu admite puncte de maxim sau minim și este tot timpul ascendentă (dacă luăm plus în față).

Avem apoi $y(2) = 0$, $y'(2) = 0$, deci curba taie pe Ox în punctul $A(2, 0)$ și este tangentă axei Ox în acest punct. Forma curbei se vede în fig. 43. Punctul A poartă numele *de punct de întoarcere.*

Să găsim punctele de intersecție ale celor două curbe. Ecuația absciselor este

$$4(x-2)^3 - 4 \times 27\, x = 0, \quad \text{sau} \quad x^3 - 6x^2 - 15x - 8 = 0.$$

Această ecuație admite rădăcina dublă $x = -1$, care nu dă nici un punct de intersecție real, deoarece $x = -1 < 2$, și rădăcina simplă $x = 8$ care dă două puncte de intersecție

$$M(8, 4\sqrt{2}) \text{ și } M'(8, -4\sqrt{2}).$$

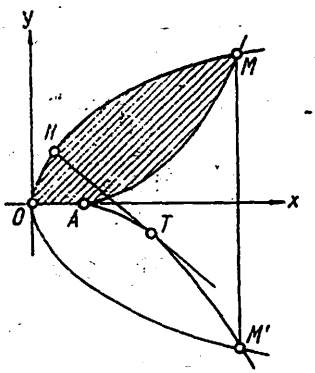


Fig. 43

Înainte de a calcula aria cuprinsă între cele două curbe, vom arăta ce legătură există între ele. Se demonstrează că orice *normală a parabolei* (1) *este tangentă curbei* (2). Se mai spune și astfel: înfășurătoarea normalelor parabolei (1) este curba (2), care se numește și *desfășurata* sau *evoluta* parabolei.

Nu vom demonstra această proprietate în cazul general, ci într-un caz particular. Fie $N(1,2)$ un punct pe parabolă. Ecuația normalei în acest punct este:

$$y - 2 = -(x-1), \quad \text{sau} \quad x + y - 3 = 0.$$

Pentru a dovedi că această dreaptă este tangentă curbei (2), trebuie dovedit că sistemul de ecuații:

$$x + y - 3 = 0, \quad 27y^2 = 4(x-2)^3,$$

are o rădăcină dublă, sau că ecuația care rezultă din eliminarea lui x de exemplu, anume $4(y-1)^3+27y^2=0$ are o rădăcină dublă. Dezvoltînd ecuația, avem $4y^3+15y^2+12y-4=0$.

Ecuația derivată $12y^2+30y+12=0$ sau $2y^2+5y+2=0$ are rădăcinile $y=-2$; $y=-\frac{1}{2}$. Se constată că $y=-2$ verifică și ecuația $4y^3+15y^2+12y-4=0$, deci $y=-2$ este o rădăcină dublă.

Avem să calculăm aria Σ cuprinsă între parabolă și desfășurata ei. Pentru această arie avînd pe Ox ca axă de simetrie, este de-ajuns să calculăm porțiunea de deasupra lui Ox și să dublăm rezultatul.

$$\Sigma = 2\int_0^8 \sqrt{4x}\,dx - 2\int_2^8 \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^8 - \frac{8}{15\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(x-2)^5}\Big|_0^8 = \frac{352\sqrt{2}}{15}.$$

IV.12. *Se dă funcția* $y=\frac{x}{x^2+4x\sin\alpha+1}$.

Între ce limite trebuie să varieze $\sphericalangle\alpha$ *pentru ca* y *să nu fie* ∞ *pentru nici o valoare a lui* x?

Soluție. Pentru ca y să nu devină ∞ pentru nici o valoare a lui x, trebuie ca ecuația $x^2+4x\sin\alpha+1=0$ să aibă rădăcinile imaginare. Pentru aceasta trebuie ca

$$4\sin^2\alpha-1<0.$$

Deci trebuie ca $-\frac{1}{2}<\sin\alpha<+\frac{1}{2}$. Dacă presupunem că $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, atunci condițiile precedente devin $-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6}$.

Să construim acum curba. Derivata lui y este

$$y'=\frac{1-x^2}{(x^2+4x\sin\alpha+1)^2};$$

rădăcinile ei sînt $x=\pm 1$.

Pentru $x=-1$, $y=\frac{1}{2(2\sin\alpha-1)}$ este un *minim*.

Pentru $x=+1$, $y=\frac{1}{2(2\sin\alpha+1)}$ este un *maxim*.

Se vede uşor că minimul lui y este negativ, iar maximul este pozitiv. Pentru $x = \pm\infty$, avem $y = 0$, deci axa Ox este asimptotă la curbă. Curba trece prin origine şi are drept tangentă în acest punct bisectoarea întîia a axelor de coordonate (fig. 44). În adevăr, coeficientul unghiular al tangentei în origine este egal cu valoarea lui y' pentru $x = 0$, adică 1, sau egal cu limita lui $\frac{y}{x}$ cînd x tinde către zero, adică tot 1. Anulînd derivata a doua a lui y, obţinem ecuaţia

$$f(x) = x^3 - 3x - 4\sin\alpha = 0.$$

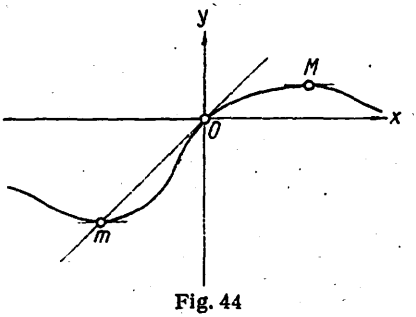


Fig. 44

Avem

$$f(-1) = 2 - 4\sin\alpha = 2(1 - 2\sin\alpha) > 0,$$

$$f(+1) = -2 - 4\sin\alpha = -2(1 + 2\sin\alpha) < 0.$$

Deci ecuaţia $f(x)$ admite o rădăcină cuprinsă între -1 şi $+1$. La această rădăcină corespunde pe curbă un punct de inflexiune, aşa cum se vede şi pe figura construită luînd $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Mai sînt încă două puncte de inflexiune, cum se vede pe figură, care corespund celorlalte două rădăcini ale ecuaţiei precedente, rădăcini exterioare intervalului $(-1, +1)$. Originea este punct de inflexiune cînd $\alpha = 0$.

IV.13. *Se dă ecuaţia*

$$4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 8x + 3 = 0. \qquad (1)$$

1. *Să se demonstreze că rădăcinile sînt reale şi distincte.*

2.. *Să se calculeze, cu două zecimale exacte, rădăcinile care nu întrec, în valoare absolută, unitatea.*

Soluţie. 1. Se vede că ecuaţia dată admite rădăcina $x = 1$, deci polinomul se împarte cu $x - 1$, iar cîtul egalat cu zero ne dă ecuaţia

$$4x^3 - 11x - 3 = 0. \qquad (2)$$

Facem schimbarea de necunoscută $x = \frac{y}{k}$ şi ecuaţia devine

$$\frac{4y^3}{k^3} - \frac{11y}{k} - 3 = 0$$

şi alegem pe k aşa fel ca y^3 să aibă coeficientul 1, adică punem $k = 2$, ecuaţia devine

$$y^3 - 11y - 6 = 0.$$

care admite rădăcina $y = -3$, deci ecuaţia (2) admite rădăcina $x = -\frac{3}{2}$, adică polinomul $4x^3 - 11x - 3$ se împarte cu $2x + 3$, iar cîtul egalat cu zero ne dă ecuaţia de gradul al doilea

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

care are rădăcinile reale şi diferite

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

În rezumat, ecuaţia dată (1) are rădăcinile

$$-\frac{3}{2} < \frac{3 - \sqrt{17}}{4} < 1 < \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

toate reale şi diferite, două raţionale şi două iraţionale.

2. O singură rădăcină este cuprinsă între -1 şi $+1$, rădăcina $\frac{3 - \sqrt{17}}{4}$.

Însă $\sqrt{17} = 4{,}123 \ldots$, deci cu două zecimale exacte

$$\frac{3 - \sqrt{17}}{4} = -0{,}28.$$

IV.14. *Se consideră ecuaţia* $f(x) = x^3 - 7x\cos^2 q + 6\cos 2q = 0$. *Să se determine* q *astfel ca una din rădăcinile ecuaţiei să fie îndoitul alteia; în acest caz să se rezolve ecuaţia* $f(x) = 0$.

Soluţie. Însemnăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei date şi presupunem că $x_3 = 2x_2$. Scriind relaţiile între coeficienţi şi rădăcini, la care adăugăm relaţia de condiţie, avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -7\cos^2 q,$$
$$x_1x_2x_3 = -6\cos 2q, \quad x_3 = 2x_2.$$

Pentru a determina pe q va trebui să eliminăm pe x_1, x_2, x_3 între aceste patru relaţii. Ţinînd seama de ultima relaţie, celelalte trei devin

$$x_1 + 3x_2 = 0, \quad 3x_1x_2 + 2x_2^2 = -7\cos^2 q, \quad 2x_1x_2^2 = -6\cos 2q,$$

sau

$$x_1 + 3x_2 = 0,\ x_2(3x_1 + 2x_2) = -7\cos^2 q,\ x_1x_2^2 = -3\cos 2q.$$

Din prima relație deducem $x_1 = -3x_2$ și înlocuind în celelalte, avem

$$x_2^2 = \cos^2 q,\ x_2^3 = \cos 2q.$$

Eliminînd în fine pe x_2, avem $\cos^6 q = \cos^2 2q$, avem o ecuație în q, care se poate descompune în următoarele două ecuații

$$\cos^3 q = \cos 2q, \tag{1}$$

$$\cos^3 q = -\cos 2q. \tag{2}$$

Ținînd seama că $\cos 2q = 2\cos^2 q - 1$, ecuațiile (1), (2) se scriu

$$(1')\ \cos^3 q - 2\cos^2 q + 1 = 0,$$

$$(2')\ \cos^3 q + 2\cos^2 q - 1 = 0.$$

Ecuația (1') se mai scrie $(\cos q - 1)(\cos^2 q - \cos q - 1) = 0$,

$$\cos q - 1 = 0;\ \cos^2 q - \cos q - 1 = 0.$$

Deci $\cos q = 1$, $q = 2k\pi$. Rădăcinile sînt în acest caz

$$x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$$

Ecuația $\cos^2 q - \cos q - 1 = 0$, ne dă $\cos q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; acceptabilă este numai rădăcina

$$\cos q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}618,\ q = 2k\pi \pm 128°8'34''.$$

Rădăcinile sînt în acest caz

$$x_1 = -3\frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ x_3 = 1 - \sqrt{5}.$$

Ecuația (2') se scrie $(\cos q + 1)(\cos^2 q + \cos q - 1) = 0$, $\cos q + 1 = 0$, $\cos^2 q + \cos q - 1 = 0$; $\cos q = -1$, $q = (2k + 1)\pi$.

Rădăcinile sînt în acest caz $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

$$\cos^2 q + \cos q - 1 = 0,\ \cos q = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

convine numai

$$\cos q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618, \quad q = 2k\pi \pm 52°51'26''.$$

Rădăcinile sînt în acest caz:

$$x_1 = -3\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = 1-\sqrt{5},$$

adică sînt aceleaşi ca şi în cazul cînd q era dat de ecuaţia

$$\cos^2 q - \cos q - 1 = 0.$$

Lucrul era de prevăzut căci $\cos^2 q$ şi $\cos 2q = 2\cos^2 q - 1$ nu se schimbă cînd în loc de $\cos q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, punem $\cos q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

IV. 15. *Se dă un pătrat $ABCD$ de latură a şi un punct M în interiorul lui. Se uneşte M cu vîrfurile opuse B şi D, iar din M se coboară perpendicularele MP şi MQ respectiv pe AB şi AD. Să se determine poziţiile punctului M astfel ca volumele rezultate din învîrtirea triunghiurilor MDQ şi MPB în jurul lui AD să fie egale. În special să se afle poziţia lui M de pe diagonala BD.*

Soluţie. Volumul născut din rotirea triunghiului MDQ în jurul lui AD este volumul conului cu generatoarea MD, iar volumul născut din rotirea triunghiului MPB în jurul lui AD este diferenţa dintre volumul trunchiului de con cu generatoarea MB şi volumul cilindrului cu generatoarea MP. Dacă notăm $MQ = x$, $MP = y$, ecuaţia problemei este următoarea:

$$\frac{1}{3}\pi x^2 (a-y) = \frac{1}{3}\pi y (x^2 + ax + a^2) - \pi x^2 y.$$

Efectuînd calculele, această ecuaţie se scrie

$$y(x^2 - ax - a^2) + ax^2 = 0.$$

Privind pe x, y drept coordonate în raport cu axele AB, AD, ale punctului M, această ecuaţie reprezintă o cubică ce trece prin vîrful A al patratului. Porţiunea din această cubică, cuprinsă în interiorul patratului, reprezintă poziţiile pe care le poate lua punctul M în condiţiile problemei. Să ne

ocupăm puțin de această curbă. Rezolvăm ecuația în raport cu y și avem

$$y = -\frac{ax^2}{x^2 - ax - a^2},$$

iar derivata ei

$$y' = \frac{a^2x(x + 2a)}{(x^2 - ax - a^2)^2}.$$

Pentru $x = -2a$, y este maxim și egal cu $-\frac{4a}{5}$;

pentru $x = 0$, y este minim și egal cu 0.

Dacă însemnăm cu α și β rădăcinile ecuației $x^2 - ax - a^2 = 0$ adică

$$\alpha = a\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = a\frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

dreptele $x = \alpha$ și $x = \beta$ sînt asimptote ale curbei, paralele cu latura AD, iar dreapta $y = -a$ este o asimptotă paralelă cu latura AB.

Variația lui y este cuprinsă în tabela

x	$-\infty$	$-2a$	α	0	β	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-\ 0\ +$	$+$	$+$
y	$-a$	$-\frac{4a}{5}$	$\begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$	0	$\begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$	$-a$

Reprezentarea grafică a funcției, adică locul geometric al punctului M, se construiește ușor după această tabelă.

Se vede ușor pe acest grafic, că avem un singur punct M pe diagonala BD, care răspunde problemei. (Pe prelungirea diagonalei BD avem încă două puncte de intersecție cu cubica).

Să determinăm punctul M de pe diagonala BD. Vom determina distanța $MQ = x$ a acestui punct la latura AD. Pentru aceasta intersectăm dreapta BD a cărei ecuație este $x + y = a$, cu cubica. Ecuația care dă abscisele punctelor de intersecție este $(a - x)(x^2 - ax - a^2) + ax^2 = 0$ sau $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0$.

Ecuația prezintă două variații, deci are două sau nici o rădăcină pozitivă. Graficul ne spune însă că avem două rădăcini pozitive.

Ecuația $f(-x) = 0$ prezintă o singură variație, deci ecuația $f(x) = 0$ admite o singură rădăcină negativă, așa cum se vede și pe figură.

Pe noi ne interesează numai rădăcina pozitivă cuprinsă între 0 și a.

Avem

$$f(0) = a^3 > 0, \quad f(a) = -a^3 < 0.$$

Să calculăm această rădăcină, de exemplu, cu două zecimale exacte, folosind metoda părților proporționale.

Rădăcina este de forma $x = 0 + h = h$; să găsim pe h.

$$h = -\frac{(0-a)f(0)}{f(0)-f(a)} = \frac{a^4}{2a^3} = 0{,}5\,a.$$

Observăm că $f''(x) = 6(x-a)$, deci $f''(x) < 0$ pentru $x < a$, curba $y = f(x)$ își are concavitatea întoarsă spre y negativ. Rezultă că rădăcina se află cuprinsă între $0{,}5a$ și a. În adevăr

$$f(0{,}5a) = 0{,}375a^3 > 0, \quad f(a) = -a^3 < 0.$$

A doua aproximație

$$h = -\frac{(0{,}5\,a - a)f(0{,}5)}{f(0{,}5 - f(a)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}375}{1{,}375\,a} = 0{,}13\,a.$$

O valoare apropiată pentru rădăcină este deci

$$x = 0{,}5a + 0{,}13a = 0{,}63a.$$

Rădăcina este cuprinsă între $0{,}63\ a$ și a. În adevăr

$$f(0{,}63a) = 0{,}593\,47\,a^3 > 0, \quad f(a) = -a^3 < 0.$$

A treia aproximație

$$h = -\frac{(0{,}63a - a)f(0{,}63a)}{f(0{,}63\,a) - f(a)} = \frac{0{,}37 \times 0{,}059\,347}{1{,}059\,347\,a} = 0{,}02a.$$

Valoarea rădăcinii cu două zecimale exacte este

$$x = (0{,}63 + 0{,}02)\,a = 0{,}65\ a.$$

În adevăr avem

$$f(0{,}65\,a) = 0{,}007\,125\,a^3 > 0, \quad f(0{,}66\,a) = -0{,}030\,304\,a^3 < 0.$$

IV.16. *Să se rezolve ecuația* $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, *știind că pătratul unei rădăcini este egal cu suma pătratelor celorlalte două rădăcini și să se afle relația de condiție.*

Soluție. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației date. Avem relațiile între rădăcini și coeficienți,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p\,;\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q,$$
$$x_1x_2x_3 = -r\,;\quad x_1^2 = x_2^2 + x_3^2.$$

Ultima relație se mai scrie astfel $2x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sau $2x_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = p^2 - 2q$.

Deci

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{p^2 - 2q}{2}}.$$

Din relațiile întîia și a treia se deduce

$$x_2 + x_3 = -p \mp \sqrt{\frac{p^2 - 2q}{2}},\quad x_2x_3 = \mp\frac{r}{\sqrt{\frac{p^2-2q}{2}}},$$

x_2x_3 se pot găsi deci din rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea. Înlocuind pe x_1, $x_2 + x_3$, x_2x_3 în relația a doua scrisă sub forma

$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = q,$$
$$\mp\sqrt{\frac{p^2 - 2q}{2}}\left(-p \mp \sqrt{\frac{p^2 - 2q}{2}}\right) \pm \frac{r}{\sqrt{\frac{p^2-2q}{2}}} = -q.$$

Eliminînd numitorii și izolînd radicalul, obținem

$$p\,(p^2 - 2q) + 2r = \mp\sqrt{\frac{p^2 - 2q}{2}}\cdot p^2.$$

Ridicînd la pătrat $2\,[p(p^2 - 2q) + 2r]^2 = (p^2 - 2q)\,p^4$, sau

$$8r^2 + 8pr\,(p^2 - 2q) + p^2\,(p^2 - 2q)\,(p^2 - 4q) = 0.$$

Aceasta este relația de condiție.

IV.17. *Să se formeze ecuația care determină baza unui triunghi isoscel cu suprafața* a^2, *înscris într-un cerc cu raza* r. *Să se găsească condiția ca problema să fie posibilă, precum și numărul soluțiilor. Să se rezolve ecuația în cazul unei singure soluții.*

Soluție. Fie ABC un triunghi isoscel, $BC = x$ baza, $AH = h$ înălțimea, I punctul în care înălțimea taie a doua oară

cercul circumscris. Avem relația $BH^2 = HA \times HI$, sau $\frac{x^2}{4} = h(2r - h)$.

De aci deducem

$$\frac{x^3}{4} = hx\ (2r - h), \text{ sau } \frac{x^3}{4} = 2a^2(2r - h).$$

Deci $h = 2r - \frac{x^3}{8a^2}$. Ecuația cerută este

$$2a^2 = x\left(2r - \frac{x^3}{8a^2}\right), \text{ sau } f(x) = x^4 - 16a^2rx + 16a^4 = 0.$$

Ecuația derivată este $4x^3 - 16\ a^2r = 0$ și are o singură rădăcină reală $x = \sqrt[3]{4a^2r}$.

$f\left(\sqrt[3]{4a^2r}\right) = 4a^2\left(4a^2 - 3r\sqrt[3]{4a^2r}\right)$, $\quad f(-\infty) > 0$, $f(+\infty) > 0$,

Ecuația $f(x) = 0$ va avea două rădăcini reale dacă $4a^2 < 3r\sqrt[3]{4a^2r}$.

Cele două rădăcini vor fi reale și pozitive, căci $f(x)$ prezintă două variații, iar $f(-x)$ nu prezintă nici o variație.

Condiția de inegalitate de mai sus se mai scrie

$$64a^6 < 4 \times 27a^2r^4,\ 16a^4 < 27r^4,\ 2a < r\sqrt[4]{27}.$$

Vom avea o singură soluție, cînd ecuația va avea o rădăcină dublă, deci cînd $a = \frac{1}{2} r\sqrt[4]{27}$.

Rădăcina corespunzătoare este $x = r\sqrt{3}$. Deci în acest caz triunghiul isoscel ABC devine echilateral.

IV.18. *Se dă ecuația*

$$x^5 - 5a^4x + 4a^3(b^2 - 1) = 0,$$

a, b fiind coordonatele unui punct din plan; să se împartă planul în regiuni, după realitatea și semnul rădăcinilor ecuației.

Soluție. Fie $f(x) = x^5 - 5a^4x + 4a^3(b^2 - 1) = 0$ ecuația dată. Ecuația derivată este $f'(x) = 5x^4 - 5a^4 = 0$, care admite două rădăcini reale $x = -a$, $x = +a$,

$$f(-a) = 4a^3(a + b^2 - 1),\ f(+a) = 4a^3(b^2 - a^2 - 1)$$
$$f(-\infty) < 0,\ f(+\infty) > 0.$$

Realitatea rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ depinde de poziția punctului $M(a, b)$ față de curbele $x = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y^2 - x^2 - 1 = 0$.

Prima reprezintă axa Oy, a doua cercul cu centrul în origine şi raza 1, a treia hiperbola echilaterală a cărei axă transversă este Oy şi care este tangentă cercului precedent.

Semnul rădăcinilor ecuaţiei depinde de numărul de variaţii din ecuaţie, deci de semnul expresiei $a^3(b^2 - 1)$. Vom avea deci de cercetat poziţia punctul $M(a, b)$ faţă de curbele $x = 0$, $y^2 - 1 = 0$, care reprezintă axa Oy şi tangentele paralele cu Ox la cercul şi hiperbola de mai sus.

Regiunea interioară cercului este cea negativă, cea exterioară este pozitivă; regiunea interioară hiperbolei este cea pozitivă, cea exterioară este negativă. Regiunea interioară dreptelor $y^2 - 1 = 0$ este negativă, cea exterioară este pozitivă.

Să numerotăm acum regiunile. Regiunea *I* cea interioară cercului, către x pozitiv; regiunea II interioară cercului, către x negativ; regiunea III interioară hiperbolei, către x pozitiv; regiunea IV interioară hiperbolei, către x negativ; regiunea V cuprinsă între dreptele $y^2 - 1 = 0$, exterioară cercului, către x pozitiv; regiunea VI, simetrica precedentei faţă de Oy; regiunea VII exterioară celor două drepte $y^2 - 1 = 0$, exterioară hiperbolei, către x pozitiv; regiunea VIII, simetrica precedentei faţă de Oy.

Discuţia realităţii şi semnului rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$ se poate acum concentra în tabela următoare:

Regiunea	$f(-a)$	$f(+a)$	Rădăcini reale
I	−	−	una pozitivă;
II	+	+	una negativă;
III	+	+	una negativă;
IV	−	−	una pozitivă;
V	+	+	una pozitivă, două negative
VI	−	+	una negativă;
VII	+	−	una negativă, două pozitive
VIII	−	+	una pozitivă.

IV.19. *Să se construiască un triunghi cunoscînd latura* $BC = a$ *şi ştiind că suma volumelor născute prin rotaţie în jurul laturilor* AB, AC *este de* λ *ori mai mare decît volumul născut prin rotaţia în jurul lui* BC, *iar suma ariilor născute prin rotaţia în jurul primelor două laturi este de* μ *ori mai mare decît cea născută prin rotaţia în jurul laturei a treia.*

λ și μ fiind coordonatele rectangulare ale unui punct, să se găsească regiunea căreia îi corespund triunghiuri reale.

Soluție. Însemnăm $AC = b$, $AB = c$, iar cu h_a, h_b, h_c, S înălțimile și aria triunghiului. Ecuațiile problemei sînt

$$\frac{1}{3}\pi h_b^2 b + \frac{1}{3}\pi h_c^2 c = \frac{1}{3}\lambda \pi h_a^2 a,$$

$$\pi h_b (c + a) + \pi h_c (a + b) = \mu \pi h_a (b + c).$$

Avînd în vedere că $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, sistemul precedent, se mai scrie

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \mu \frac{b + c}{a},$$

de unde deducem

$$bc = -\frac{(\lambda - 2)a^2}{\lambda(\lambda - \mu)}, \quad b + c = -\frac{(\lambda - 2)a}{\lambda - \mu}.$$

Laturile b, c sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$z^2 + za\frac{\lambda - 2}{\lambda - \mu} - \frac{(\lambda - 2)a^2}{\lambda(\lambda - \mu)} = 0.$$

Condiția de realitate este

$$R = a^2\lambda(\lambda - 2)\frac{\lambda^2 + 2\lambda - 4\mu}{\lambda^2(\lambda - \mu)^2} > 0.$$

Semnul lui R depinde de poziția punctului $M(\lambda, \mu)$ față de curbele $x = 0$, $x - 2 = 0$, $x^2 + 2x - 4y = 0$, care reprezintă respectiv axa Oy, o paralelă la Oy și o parabolă care trece prin origine și taie dreapta $x - 2 = 0$, în punctul $A(2, 2)$.

Cantitățile b, c fiind laturi ale unui triunghi mai trebuie supuse condițiilor

$$bc > 0, \quad b + c > a.$$

Aceste condiții se scriu

$$\frac{-(\lambda - 2)a^2}{\lambda(\lambda - \mu)} > 0, \quad \frac{-(\lambda - 2)a}{\lambda - \mu} > a$$

și sînt echivalente cu

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - \mu) < 0, \quad (\lambda - \mu)(2\lambda - \mu - 2) < 0.$$

Sîntem astfel conduși să introducem în separarea planului și dreptele $x - y = 0$, $2x - y - 2 = 0$, care reprezintă prima

bisectoare a axelor şi o dreaptă ce taie parabola în punctele A (2, 2) şi B (4,6). Cele 4 drepte şi parabola împart planul în 13 regiuni: regiunea I, segmentul parabolic OA; regiunea II, segmentul parabolic AB; regiunea III triunghiul curbiliniu format de parabolă şi dreptele Oy, AB; regiunea IV, interioară parabolei şi cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x - y = 0$, $x - 2 = 0$; regiunea V, interioară parabolei şi cuprinsă între dreptele $x - 2 = 0$, $2x - y - 2 = 0$; regiunea VI, interioară parabolei către x-ii negativi; regiunea VII, exterioară parabolei şi cuprinsă între ea şi bisectoare către x-ii negativi; regiunea VIII, cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x - y = 0$, $2x - y - 2 = 0$, către x-ii negativi; regiunea IX, cuprinsă între dreptele $x = 0$, $2x - y - 2 = 0$, alăturată precedentei; regiunea X, exterioară parabolei şi cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x - 2 = 0$ $2x - y - 2 = 0$, regiunea XI, exterioară parabolei şi mărginită de ea şi de dreptele $x - y = 0$, $2x - y - 2 = 0$; regiunea XII, exterioară parabolei şi limitată de dreptele $x - y = 0$, $x - 2 = 0$, regiunea XIII, exterioară parabolei şi limitată de ea şi de dreapta $2x - y - 2 = 0$.

Se observă apoi cu uşurinţă că regiunea negativă a parabolei este cea interioară; regiunea negativă a dreptei $2x - y - 2 = 0$ este regiunea originei etc.

Notăm pentru prescurtare

$$D = \lambda - 2, \quad E = \lambda^2 + 2\lambda - 4\mu, \quad F = \lambda - \mu, \quad G = 2\lambda - \mu - 2,$$
$$H = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - \mu), \quad K = (\lambda - \mu)(2\lambda - \mu - 2)$$

şi concentrăm discuţia în tabela următoare:

Regiunea	λ	D	E	R	F	G	H	K	Triunghiuri
I	+	−	−	+	+	−	−	−	reale
II	+	+	−	−					
III	+	−	+	−					
IV	+	−	−	+	−	−	+	+	imaginare
V	+	+	−	−					
VI	−	−	−	−					
VII	−	+	+	−	−	−	−	+	imaginare
VIII	−	−	+	+	+	−	+	−	imaginare
IX	−	−	+	+	+	+	+	+	imaginare
X	+	−	+	−					
XI	+	+	+	+	−	+	−	−	reale
XII	+	+	+	+	+	+	+	+	imaginare
XIII	+	+	+	+	−	−	−	+	imaginare

În regiunile în care $R < 0$ n-am mai completat rubricile următoare pentru că triunghiurile sînt imaginare. Triunghiurile sînt reale numai în două regiuni, I și XI.

IV.20. *Într-o sferă, paralel cu trei plane perpendiculare două cîte două, se fac secțiuni plane la aceeași distanță h de centru; se presupune că planele acestor secțiuni se întîlnesc afară din sferă.*

Suprimîndu-se segmentele sferice astfel determinate, rămîne un solid al cărui volum se cere.

Care este valoarea minimă a lui h așa fel încît condiția să fie realizată?

Să se determine valoarea acestui parametru așa ca volumul rămas să fie 7/8 din volumul sferei.

Soluție. Fie R raza sferei; volumul V care rămîne după suprimarea celor șase segmente sferice este egal cu $4\pi R^3/3$, mai puțin volumul v al unuia din aceste segmente sferice luat de șase ori.

$$v = \frac{1}{3}\pi R \times 2R\,(R-h) - \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 - h^2),$$

$$V = \frac{2}{3}\pi(-3h^3 + 9R^2h - 4R^3).$$

O primă condiție de posibilitate este $h < R$. A doua este ca $h^2 + h^2 > R^2$ sau $h > R\frac{\sqrt{2}}{2}$ care exprimă că vîrfurile cubului format de cele șase plane se găsesc în afara sferei. Valoarea minimă a lui h este deci $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Scriind că $V = \frac{7}{8}\,4\pi\,\frac{R^3}{3}$, obținem ecuația în h

$$f(h) = 12h^3 - 36R^2h + 23R^3 = 0.$$

Această ecuație admite o rădăcină negativă care nu ne interesează și două rădăcini pozitive. Una cuprinsă între $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ și R și alta mai mare decît R, care iarăși nu ne interesează.

Avem deci o singură rădăcină acceptabilă cuprinsă între $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ și R. Să o calculăm cu două zecimale exacte prin metoda părților proporționale. Luînd $\sqrt{2} = 1{,}41$, avem $f(0{,}7R) = 1{,}7R^3$; $f(R) = -R^3$.

Prima aproximație

$$h_1 = 0{,}7R - \frac{(R - 0{,}7R) \times 1{,}7R^3}{-R^3 - 1{,}7R^3} = 0{,}89R.$$

Deoarece $f''(h) > 0$ în intervalul $(0{,}7R;\ R)$ se vede pe o figură că această valoare este prin adaos.

Aplicăm din nou metoda la intervalul $(0{,}7R;\ 0{,}89R)$. Avem

$$h_2 = 0{,}7R - \frac{(0{,}89R - 0{,}7R) \times 1{,}7R^3}{-0{,}58R^3 - 1{,}7R^3} = 0{,}84R.$$

Prima zecimală exactă este deci 8.

Și această valoare este prin adaos. Aplicînd din nou metoda la intervalul $(0{,}7R;\ 0{,}84R)$, găsim $h_3 = 0{,}82R$. Calculînd,

$$f(0{,}83R) = -\,0{,}018\,556R^3 < 0, \quad f(0{,}82R) = 0{,}096\,416R^3 > 0.$$

Valoarea rădăcinii cu două zecimale exacte este deci $h = 0{,}82R$.

IV. 21. *Se consideră un con circular drept, avînd raza bazei și înălțimea egale cu un metru. Să se taie acest con prin două plane paralele cu baza, egal depărtate, unul de vîrf, iar celălalt de bază, astfel încît trunchiul de con mijlociu să fie egal în volum cu suma trunchiului inferior și conului superior. Să se determine distanțele acestor două plane pînă la bază, cu aproximație de un centimetru.*

Soluție. Fie x distanța planului inferior de bază și a planului superior de vîrf. Ecuația problemei se va obține scriind că volumul trunchiului mijlociu este jumătate din volumul conului dat. Volumul conului dat este $\frac{\pi}{3}$. Să aflăm volumul trunchiului mijlociu. Razele acestui trunchi sînt respectiv x și $1 - x$, iar înălțimea lui este $1 - 2x$. Volumul trunchiului este deci

$$\frac{1}{3}\pi(1-2x)[x^2 + x(1-x) + (1-x)^2] = \frac{1}{3}\pi(1-2x)(x^2 - x + 1).$$

Ecuația problemei este

$$2(1-2x)(x^2 - x + 1) = 1 \text{ sau } f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Această ecuație n-are nici o rădăcină negativă și trei sau o rădăcină pozitivă. Derivata $6(x^2 - 2x + 1)$ este totdeauna

pozitivă, deci curba $y = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ nu poate traversa axa Ox decît o singură dată. Aşa dar ecuaţia are o singură rădăcină pozitivă. Avem $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = +1$ deci rădăcina este cuprinsă între 0 şi $\frac{1}{2}$. Să o calculăm cu trei zecimale exacte prin metoda părţilor proporţionale. Prima aproximaţie este

$$x_1 = -\frac{1}{2} \times \frac{-1}{1+1} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Se vede pe o figură că această valoare este prin adaos. Aplicăm din nou metoda la intervalul $(0\,;0{,}25)$ şi avem

$$x_2 = \frac{-0{,}25 \times 0{,}187\,5}{1{,}25} = 0{,}21.$$

Avem

$$f(0{,}25) = 0{,}187\,5\,; \quad f(0{,}21) = 0{,}032\,444.$$

Aplicăm din nou metoda la intervalul $(0\,;\ 0{,}21)$ şi găsim

$$x_3 = \frac{0{,}21 \times 0{,}032\,444}{1{,}21} = 0{,}203.$$

Aplicînd încă de două ori metoda, găsim că valoarea rădăcinii cu trei zecimale exacte este $x = 0{,}201$ m.

IV.22. *Să se afle relaţia care leagă pe* $\cos \omega$ *de* $\cos 5\omega$ *şi să se compare rezultatul cu relaţia*

$$x^5 + px^3 + qx + r = 0 \qquad (1)$$

în care se va face, în prealabil, schimbarea $x = \lambda \cos \omega$. *Să se scrie condiţiile pentru ca ambele relaţii să fie echivalente. Se va face aplicaţie la ecuaţia*

$$32x^5 - 360x^3 + 810x - 243 = 0 \qquad (2)$$

ale cărei rădăcini se vor calcula cu ajutorul tabelei de logaritmi.

Soluţie. $\cos 5\omega = \cos(3\omega + 2\omega) = \cos 3\omega \cos 2\omega - \sin 3\omega \sin 2\omega.$

$\cos 3\omega = \cos \omega(4 \cos^2 \omega - 3)$, $\cos 2\omega = 2\cos^2 \omega - 1.$

$\sin 3\omega = \sin \omega(3 - 4 \sin^2 \omega)$, $\sin 2\omega = 2 \sin \omega \cos \omega$;

făcînd înlocuirile şi simplificările, obţinem

$$\cos 5\omega = 16 \cos^5 \omega - 20 \cos^3 \omega + \cos \omega. \qquad (3)$$

Formula (3) se mai poate obține în modul următor: se ridică la puterea cincea binomul $(\cos\omega + i\sin\omega)$ în două moduri diferite, odată cu formula lui Moivre și odată *cu formula binomului*; $\cos 5\omega + i\sin 5\omega = \cos^5\omega + 5i\cos^4\omega\sin\omega + 10i^2\cos^3\omega\sin^2\omega + 10\,i^3\cos^2\omega\sin^3\omega + 5\,i^4\cos\omega\sin^4\omega + i^5\sin^5\omega$, exprimăm că partea reală din partea întîia este egală cu partea reală din partea a doua.

$$\cos 5\omega = \cos^5\omega - 10\,(1-\cos^2\omega)\cos^3\omega + \\ + 5\,(1 - 2\cos^2\omega + \cos^4\omega)\cos\omega$$

și grupînd termenii asemenea regăsim formula (3).

Din relația $x = \lambda\cos\omega$ deducem $\cos\omega = \frac{x}{\lambda}$, care introdus în (3) ne dă $16x^5 - 20\lambda^2x^3 + 5\lambda^4x - \lambda^5\cos 5\omega = 0$ sau

$$x^5 - \frac{5}{4}\lambda^2x^3 + \frac{5}{16}\lambda^4x - \frac{1}{16}\lambda^5\cos 5\omega = 0. \qquad (4)$$

Pentru ca ecuațiile (1) și (4) să fie echivalente, trebuie ca diferitele puteri ale lui x să aibă, în cele două ecuații, coeficienți proporționali; dar termenii în x^5 au coeficienți egali, deci și ceilalți coeficienți sînt respectiv egali, adică

$$p = \frac{-5\lambda^2}{4},\quad q = \frac{5\lambda^4}{16},\quad r = -\frac{\lambda^5}{16}\cos 5\,\omega. \qquad (5)$$

Dacă eliminăm pe λ, între primele două relații, avem condiția

$$p^2 = 5q. \qquad (6)$$

Deducem mai departe

$$\lambda = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{5}},\ \text{deci}\ p < 0; \qquad (7)$$

$$\cos 5\omega = -\frac{16r}{\lambda^5} = -\frac{5r}{\lambda q} = \mp\frac{-5\sqrt{5r}}{2q\sqrt{-p}}.$$

Condițiile (6) și (7) sînt condițiile de echivalență a ecuațiilor (1) și (4). Calculul de mai sus ne dă o metodă pentru rezolvarea ecuațiilor de forma (1) în care coeficienții satisfac condiția (6). Fie ecuația dată (2) care se mai scrie

$$x^5 - \frac{45}{4}x^3 + \frac{405}{16}x - \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 0 \qquad (8)$$

și care este de forma (1) cu $p = -\frac{45}{4}$, $q = \frac{405}{15}$, $r = -\left(\frac{3}{2}\right)^5$.

Condiția (6) este îndeplinită căci $p < 0$ și $p^2 = \left(\frac{45}{4}\right)^2 = 3^4 \times \frac{5^2}{2^4}$, $5q = 5 \times 5 \times \frac{81}{16}$. Deducem $\lambda = \pm 2\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm 3$, $\cos 5\omega = \pm \frac{1}{2}$.

Dacă luăm semnul superior, avem $\lambda = 3$, $\cos \omega = \frac{1}{2}$, deducem $5\omega = 60° + 2k \times 180°$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$; $\omega = 12° + k \times 72°$, deci rădăcinile ecuației (2) sînt toate reale și egale cu $x = \lambda \cos \omega$ adică

$$x = 3 \cos (12° + k \times 72°), \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4,). \qquad (9)$$

Se poate vedea și direct, cu ajutorul teoremei lui Rolle, că ecuația (2) are toate rădăcinile reale. În adevăr, din

$$f(x) = 32x^5 - 360x^3 + 810x - 243 = 0,$$

deducem că ecuația derivată

$$f'(x) = 10(16x^4 - 108x^2 + 81) = 0$$

are rădăcinile reale

$$x^2 = 18\frac{3 \pm \sqrt{5}}{61}, \quad x = \pm 3\frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}.$$

Șirul lui *Rolle* este

$$f(-\infty) < 0; \; f\left(-3\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = 243; \; f\left(-3\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = -729;$$

$$f\left(3\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = +243; \; f\left(3\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = -729; \; f(+\infty) > 0,$$

prezintă numai variații, deci toate rădăcinile ecuației (2) sînt reale. Calculul efectiv al rădăcinilor îl facem cu formula (9) și obținem

$$x_1 = 3 \cos 12° = 3 \times 0{,}978\,14 = 2{,}934\,42;$$
$$x_2 = 3 \cos 84° = 3 \sin 6° = 3 \times 0{,}104\,52 = 0{,}313\,56;$$
$$x_3 = 3 \cos 156° = -3 \cos 24° = -3 \times 0{,}913\,54 = -2{,}740\,62;$$
$$x_4 = 3 \cos 228° = -3 \cos 48° = -3 \times 0{,}669\,13 = -2{,}007\,39;$$
$$x_5 = 3 \cos 300° = -3 \cos 60° = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Rădăcinile separate de șirul lui *Rolle* sînt în ordinea

$$x_3 < x_4 < x_2 < x_5 < x_1.$$

IV.23. *Să se discute rădăcinile ecuației*

$$f(x) = 4x^3 - 3(a+b)x^2 + 3abx + a^2b^2 = 0,$$

cînd a și b reprezintă coordonatele unui punct din plan.

Făcînd $a = b = 1$, să se calculeze, cu aproximație mai mică de o sutime, rădăcinile ecuației obținute.

Soluție. Discutăm ecuația cu teorema lui *Rolle*; ecuația derivată este

$$f'(x) = 3\,[4x^2 - 2(a+b)x + ab] = 0$$

și admite rădăcinile $\frac{a}{2}$ și $\frac{b}{2}$; șirul lui *Rolle* este

$$f(-\infty) < 0; \quad f\left(\frac{a}{2}\right) = a^2\frac{1 - a + 3b + 4b^2}{4},$$

$$f\left(\frac{b}{2}\right) = b^2\frac{-b + 3a + 4a^2}{4}; \quad f(+\infty) > 0.$$

Expresiile care produc variații în acest șir sînt

$$u = 4b^2 + 3b - a, \quad v = 4a^2 + 3a - b.$$

care sînt pozitive sau negative, după poziția punctului $M(a, b)$ față de parabolele P_1 și P_2 de ecuații

$$4y^2 + 3y - x = 0$$

și

$$4x^2 + 3x - y = 0,$$

care trec prin origine, au axele paralele respectiv cu Ox și Oy și sînt una simetrica celeilalte în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate, pentru că o ecuație se deduce din cealaltă schimbînd literile x, y între ele (fig. 45).

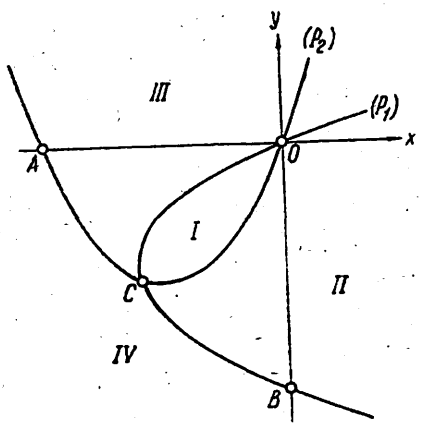


Fig. 45

Aceste două paralele împart planul în patru regiuni: regiunea I interioară ambelor parabole; regiunea II interioară parabolei P_1 și exterioară parabolei P_2; regiunea III interioară

parabolei P_2 și exterioară parabolei P_1; regiunea IV exterioară ambelor parabole.

Regiunile interioare parabolelor sînt regiunile lor negative, iar cele exterioare, pozitive. Discuția poate fi condensată în tabelul următor:

Regiunea	u	v	Rădăcinile reale
I	−	−	una
II	−	+	una
III	+	−	trei
IV	+	+	una

Dacă punctul $M(a, b)$ se găsește pe parabola P_1, avem $u = 0$, deci ecuația are rădăcina dublă $x = \frac{a}{2}$ și încă o rădăcină reală; dacă punctul $M(a, b)$ se găsește pe parabola P_2, avem $v = 0$, deci ecuația are rădăcina dublă $x = \frac{b}{2}$ și încă o rădăcină reală.

Dacă punctul $M(a, b)$ coincide cu origina O, adică $a = b = 0$, ecuația are rădăcina triplă $x = 0$, iar dacă punctul $M(a, b)$ coincide cu punctul C, adică $a = b = -\frac{1}{2}$, ecuația are rădăcina triplă $x = -\frac{1}{4}$.

Dacă $a = b = 1$, ecuația devine

$$g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

și are o singură rădăcină reală cuprinsă între $-\infty$ și $\frac{1}{2}$, pentru că punctul $M(1, 1)$ se găsește în regiunea IV; același lucru ne spune și teorema lui *Descartes*. $g(-1) = -12 < 0$; $g(0) = 1 > 0$, deci rădăcina reală este cuprinsă între -1 și 0; prin încercări putem micșora acest interval și găsim $-\frac{1}{4} < x < -\frac{1}{5}$. Aplicînd de două ori formula părților proporționale

$$x = a - \frac{(\beta - \alpha)\, g(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)},$$

unde prima oară $\alpha = -0{,}25$ și $\beta = -0{,}2$, găsim cu două zecimale exacte $x = -0{,}23$.

IV.24. *Să se studieze realitatea rădăcinilor ecuației*

$$x^4 + 4px^3 + 3(p+1)x^2 + 4px + 1 = 0$$

pentru diferitele valori ale parametrului p.

Soluție. Ecuația dată este o ecuație reciprocă de gradul al patrulea; prin transformarea $y = 1 + \frac{1}{x}$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ecuația devine

$$y^2 + 4py + 3p + 1 = 0$$

care are rădăcinile $-2p \pm \sqrt{4p^2 - 3p - 1}$, deci ecuația dată se desface în următoarele două ecuații de gradul al doilea

$$x^2 + (2p - \sqrt{4p^2 - 3p - 1})x + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 + (2p + \sqrt{4p^2 - 3p - 1})x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Coeficienții acestor ecuații sînt numere reale dacă

$$4p^2 - 3p - 1 = (4p + 1)(p - 1) \geqslant 0,$$

deci parametrul p trebuie să fie cuprins într-unul din intervalele

$$-\infty < p \leqslant -\frac{1}{4} \text{ sau } 1 \leqslant p < +\infty.$$

Condiția necesară și suficientă ca ecuația (1) să aibă rădăcinile reale este $(2p - \sqrt{4p^2 - 3p - 1})^2 - 4 \geqslant 0$ sau

$$(8p + 5)(p - 1) \geqslant 4p\sqrt{4p^2 - 3p - 1}. \qquad (3)$$

Dacă

$$p < -\frac{5}{8}, \qquad (4)$$

inegalitatea (3) este satisfăcută pentru că prima parte este pozitivă, iar partea a doua, negativă, deci ecuația (1) are rădăcinile reale.

Dacă $-\frac{5}{8} < p < -\frac{1}{4}$, ambele părți în inecuația (3) sînt negative, deci prin ridicarea ei la pătrat, sensul ei se schimbă adică

$(8p+5)^2(p-1)^2 < 16p^2(4p+1)p-1)$ sau $(p-1)(11p+5) > 0$,

care dă sau $p > 1$, care contrazice ipoteza $-\frac{5}{8} < p < -\frac{1}{4}$, sau $p < -\frac{5}{11}$, care contrazice ipoteza $-\frac{5}{8} < p < -\frac{1}{4}$, sau $p < -\frac{5}{11}$, care este acceptabilă. Alăturînd această condiţie la (4), putem spune că dacă $p \leqslant \frac{5}{11}$, ecuaţia (1) are rădăcinile reale.

Fie $p > 1$, ambele părţi în inecuaţia (3) sînt pozitive, prin ridicarea la pătrat ea îşi păstrează sensul, deci

$$(8p + 5)^2 (p - 1)^2 \geqslant 16p^2 (4p + 1) (p - 1) \geqslant 0$$

sau

$$(p - 1) (11p + 5) \leqslant 0,$$

de unde $-\frac{5}{11} \leqslant p \leqslant 1$, ceea ce nu este acceptabil.

În rezumat, ecuaţia (1) are rădăcinile reale numai dacă

$$p \leqslant -\frac{5}{11}.$$

Condiţia de realitate a rădăcinilor ecuaţiei (2) este

$$(8p + 5) (p - 1) \geqslant -4p\sqrt{4p^2 - 3p - 1}. \qquad (5)$$

Dacă $p > 1$, inecuaţia (5) este verificată pentru că prima parte este pozitivă şi partea a doua negativă, deci ecuaţia (2) are rădăcinile reale.

Dacă $p < -\frac{5}{8}$, în inecuaţia (5) ambele părţi sînt pozitive, deci ea îşi păstrează sensul prin ridicare la pătrat, adică

$$(8p + 5)^2 (p - 1)^2 \geqslant 16p^2 (p - 1) (4p + 1),$$

sau

$$(p - 1) (11p + 5) \leqslant 0,$$

de unde $-\frac{5}{11} < p < 1$, ceea ce nu este acceptabil, deci pentru $p < -\frac{5}{8}$, ecuaţia (2) nu are rădăcini reale.

Dacă $-\frac{5}{8} < p < -\frac{1}{4}$, inecuaţia (5) nu este, evident, verificată; în rezumat, ecuaţia (2) are rădăcinile reale numai dacă

$$p \geqslant 1.$$

De exemplu, pentru $p = 2$, ecuația dată se reduce la

$$x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 8x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 7x + 1) = 0$$

și are două rădăcini reale și două imaginare, pentru că ecuația (1) corespunzătoare are rădăcinile imaginare, iar ecuația (2) corespunzătoare, rădăcinile reale.

IV.25. 1. *Se consideră elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *raportată la axele* Ox *și* Oy. *Tangenta în punctul* M *al elipsei întîlnește pe* Ox *în punctul* P. *Să se exprime abscisa lui* P *cu ajutorul abscisei lui* M, *apoi, știind că raza vectoare* $r = FM$, *care pleacă din focarul* F *al elipsei, se exprimă liniar cu ajutorul abscisei lui* M, *să se arate că* $FP = \frac{cr}{a - r}$, $2c$ *fiind distanța focală.*

2. *Să se determine punctul* M *cu ajutorul razei vectoare* r *astfel ca să avem*

$$MF^2 + \lambda FP = k,$$

λ *și* k *fiind două constante. Să se arate că determinarea lui* M *se face cu ajutorul unei ecuații de gradul al treilea în* r. *Să se scrie relația dintre* λ *și* k, *astfel ca această ecuație să aibă rădăcinile în progresie aritmetică. Să se calculeze rădăcinile în cazul*

$$a = 6,\ c = 5,\ \lambda = -\frac{21}{10},\ k = -\frac{5}{4}.$$

Soluție. Fie $x = x_0$, $y = y_0$ coordonatele punctului M, deci

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Ecuația tangentei în M la elipsă este $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$. Tăind cu axa Ox, găsim abscisa punctului P

$$x = \frac{a^2}{x_0}. \tag{2}$$

Să calculăm acum raza vectoare FM. Avem

$$r^2 = FM^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2;$$

din (1) rezultă

$$y_0^2 = b^2 - b^2 \frac{x_0^2}{a^2},$$

deci

$$r^2 = FM^2 = x_0^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx_0 + b^2 + c^2.$$

Acum avînd în vedere că $b^2 + c^2 = a^2$, rezultă

$$r^2 = FM^2 = \frac{c^2x_0^2}{a^2} - 2cx_0 + a^2 = \left(\frac{cx_0}{a} - a\right)^2, \quad r = \left|\frac{cx_0}{a} - a\right|.$$

Dacă $x_0 < 0$, atunci $\left|\frac{cx_0}{a} - a\right| = a - \frac{cx_0}{a}$.

Dacă $x_0 > 0$, deoarece $x_0 < a$, atunci $\frac{cx_0}{a} < \frac{ca}{a} = c < a$, deci $\left|\frac{cx_0}{a} - a\right| = a - \frac{cx_0}{a}$.

Aşadar în toate cazurile, avem

$$r = a - \frac{cx_0}{a}. \tag{3}$$

De aici deducem $x_0 = a\frac{a-r}{c}$. Deci

$$FP = \frac{a^2}{x_0} - c = \frac{cr}{a-r}.$$

Ecuaţia $MF^2 + \lambda FP = k$ devine, după înlocuire, $r^2 + \lambda\frac{cr}{a-r} = k$.

Eliminînd numitorul şi ordonînd ecuaţia, obţinem

$$r^3 - ar^2 - (k + \lambda c)\, r + ka = 0.$$

Dacă rădăcinile acestei ecuaţii sînt în progresie aritmetică, ele sînt de forma $r_1 - \alpha$, r_1, $r_1 + \alpha$.

Scriind relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini, avem

$$(r_1 - \alpha) + r_1 + (r_1 + \alpha) = a,$$

$$r_1(r_1 - \alpha) + (r_1 - \alpha)(r_1 + \alpha) + (r_1 + \alpha)r_1 = -(k + \lambda c),$$

$$r_1(r_1 - \alpha)(r_1 + \alpha) = -ka$$

sau

$$3r_1 = a, \quad 3r_1^2 - \alpha^2 = -(k + \lambda c), \quad r_1(r_1^2 - \alpha^2) = -ka.$$

Din primele două deducem

$$r_1 = \frac{a}{3}, \quad \alpha^2 = \frac{a^2}{3} + k + \lambda c \tag{4}$$

și ducînd în a treia

$$2k - \lambda c = \frac{2a^2}{9}. \tag{5}$$

Aceasta este relația de condiție între λ și k.

În cazul $a = 6$, $c = 5$, $\lambda = -\frac{21}{10}$, $k = -\frac{5}{4}$, relația (5) este verificată $-\frac{5}{2} + \frac{21}{2} = \frac{2}{9} \times 36$.

Relațiile (4) ne dau în acest caz $r_1 = 2$, $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, iar rădăcinile ecuației în r sînt $r' = \frac{3}{2}$, $r'' = 2$, $r''' = \frac{5}{2}$.

IV.26. 1. *Fie* x_1, x_2, x_3 *rădăcinile ecuației* $f(x) = x^3 + px + q = 0$. *Să se arate că dacă* $x_1 + x_2 = ux_1x_2$, *relația de condiție este o ecuație* $\varphi(u) = 0$ *de gradul al treilea în* u. *Să se rezolve ecuația* $f(x) = 0$ *în acest caz.*

2. *Să se discute ecuația* $\varphi(u) = 0$, p *și* q *fiind coordonatele unui punct din plan.*

3. *Să se afle condiția ca ecuația* $f(x) = 0$ *să aibă rădăcinile*

$$x_1 = x_2.$$

Soluție. Să scriem relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ la care să adăugăm relația dată,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_3(x_1 + x_2) = p,$$

$$x_1x_2x_3 = -q, \quad x_1 + x_2 = ux_1x_2.$$

Să considerăm întîi cazul $x_3 = 0$; în acest caz trebuind să avem $f(x_3) = 0$, rezultă $q = 0$ și ecuația devine $x^3 + px = 0$, $x(x^2 + p) = 0$. Deci x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + p = 0$. Rezultă $x_1 + x_2 = 0$, $x_1x_2 = p$. Așadar în acest caz nu putem avea o relație de forma $x_1 + x_2 = ux_1x_2$ decît dacă $p = 0$ și atunci ar rezulta $x_3 = x_1 = x_2 = 0$.

În rezumat, ipoteza că x_3 ar fi nulă atrage după sine că toate rădăcinile sînt nule, dacă vrem ca x_1x_2 să verifice o relaţie de forma $x_1 + x_2 = ux_1x_2$. Să considerăm acum cazul important cînd

$$x_3 \neq 0.$$

Atunci a patra relaţie devine $x_3(x_1 + x_2) = ux_1x_2x_3$ şi ţinînd seama de a doua şi a treia, $p - x_1x_2 = -qu$, deci $x_1x_2 = p + qu$. Rezultă $x_1 + x_2 = u(p + qu)$.

Rădăcinile x_1, x_2 sînt date de o ecuaţie de gradul al doilea

$$y^2 - u(p + qu)y + p + qu = 0. \qquad (1)$$

Rădăcina x_3 rezultă din $x_3 = -\frac{q}{x_1x_2} = -\frac{q}{p + qu}$.

Pentru a găsi relaţia de condiţie, ducem în prima relaţie valorile aflate pentru $x_1 + x_2$ şi x_3; avem $u(p + qu) - \frac{q}{p + qu} = 0$, sau

$$\varphi(u) \equiv u(p + qu)^2 - q = 0. \qquad (2)$$

Relaţia de condiţie este deci o ecuaţie de gradul al treilea în u. Ducem în ecuaţia (1) care dă pe x_1, x^2 şi în expresia lui x_3 valorile lui u aflate din această ecuaţie.

Să discutăm ecuaţia (2). Ecuaţia derivată este

$$\varphi'(u) \equiv (p + qu)^2 + 2qu(p + qu) = (p + qu)(p + 3qu) = 0$$

şi rădăcinile ei sînt

$$-\frac{p}{3q} \text{ şi } -\frac{p}{q};$$

deducem

$$\varphi\left(\frac{-p}{3q}\right) = -\frac{4p^3 + 27q^2}{27q}, \quad \varphi\left(-\frac{p}{q}\right) = -q,$$

$$\varphi(-\infty) < 0, \quad \varphi(+\infty) > 0.$$

Numărul variaţiilor din acest şir depinde de semnele expresiilor $4p^3 + 27q^2$ şi q.

Dacă p, q sînt coordonatele unui punct din plan, vom avea de considerat poziţiile acestui punct faţă de curbele $4x^3 + 27y^2 = 0$, $y = 0$.

Prima curbă se construieşte uşor rezolvîndu-i ecuaţia în raport cu y. Ea este simetrică faţă cu axa Ox şi are în origine un punct de întoarcere. A doua este axa Ox (fig. 46).

Cele două curbe despart planul în patru regiuni numerotate I, II, III, IV. În regiunea I expresia $4p^3 + 27q^2$ este negativă. În adevăr, fie punctul M $(-3,2)$ pe curbă, iar M' un punct din regiunea I aşezat pe această ordonată. Fie x', y', coordonatele lui M'. Deoarece $x' = -3$, iar $y' < 2$, rezultă că

$$4x'^3 + 27y'^2 < 4(-3)^3 + 27(2)^2 = 0.$$

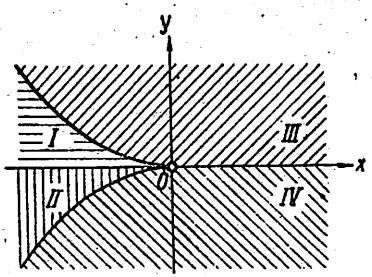


Fig. 46

La fel se vede că în regiunea II expresia $4p^3 + 27q^2$ este tot negativă, iar în regiunile III şi IV este pozitivă.

Discuţia se poate concentra în următorul tabel

Regiunea	$\varphi(-\infty)$	$\varphi\left(-\frac{p}{3q}\right)$	$\varphi\left(-\frac{p}{q}\right)$	$\varphi(+\infty)$	Rădăcini reale
I	$-$	$+$	$-$	$+$	trei
II	$-$	$-$	$+$	$+$	una
III	$-$	$-$	$-$	$+$	una
IV	$-$	$+$	$+$	$+$	una

Pentru ca ecuaţia $\varphi(u) = 0$ să aibă o rădăcină dublă, trebuie ca punctul (p, q) să fie aşezat pe curba $4x^3 + 27y^2 = 0$. În acest caz avem $4p^3 + 27q^2 = 0$ şi să se ştie că atunci şi ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină dublă.

Pentru a avea $x_1 = x_2$ trebuie ca realizantul ecuaţiei (1) să fie zero, adică:

$$u^2(p + qu)^2 - 4(p + qu) = 0, \quad \text{sau} \quad (p + qu)[u^2(p + qu) - 4] = 0,$$

deci sau $p + qu = 0$ sau $u^2(p + qu) = 4$.

Dacă $p + qu = 0$, ecuaţia $\varphi(u) = 0$ dă $q = 0$, deci $p = 0$ şi atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

A doua posibilitate este $u^2(p+qu)=4$, la care adăugăm condiția $\varphi(u)=u(p+qu)^2-q=0$. Rămîne să eliminăm pe u între aceste relații.

Ridicînd pe prima la pătrat și împărțind apoi rezultatul la a doua, scrisă sub forma $u(p+qu)^2=q$, obținem $u^3=\frac{16}{q}$ și ducînd în prima și ridicînd la cub,

$$p^3\cdot\frac{4^4}{q^2}=-3^3\times 4^3 \quad \text{sau} \quad 4p^3+27q^2=0.$$

Așa dar ecuațiile $f(x)=0$, $\varphi(u)=0$ au, în același timp, o rădăcină dublă.

IV. 27. *Se consideră sistemul de ecuații*

$$(p+1)x+py=A, \tag{1}$$

$$(p^2-1)x+p^2y=B, \tag{2}$$

în care p, A și B sînt parametri. Se cere:

1. *Să se rezolve sistemul.*

2. *Presupunînd că A și B nu depind de p, să se elimine parametrul p între ecuațiile* (1) *și* (2).

3. *Să se reprezinte grafic rezultatul eliminării pentru*

$$A=2,\ B=-1.$$

4. *Presupunînd $A=p^2-1$, $B=p^3$,*
să se determine cu două zecimale exacte valoarea pozitivă a parametrului p astfel ca rădăcinile sistemului dat (1), (2) *să fie egale*

Soluție. 1. Rezolvăm sistemul (1), (2) cu ajutorul determinanților,

$$x=\frac{Ap^2-Bp}{(p+1)p^2-(p^2-1)p}=\frac{Ap-B}{p+1},$$

$$y=\frac{(p+1)B-(p^2-1)A}{p(p+1)}=\frac{B-A(p-1)}{p}.$$

Putem rezolva sistemul și prin alte metode, de exemplu metoda eliminării; înmulțim ecuația (1) cu $p-1$, ecuația (2) cu -1,

$$(p^2-1)x+p(p-1)y=A(p-1)$$

$$-(p^2-1)x-p^2y=-B$$

şi prin adunare,

$$-py = A(p-1) - B, \quad y = \frac{B - A(p-1)}{p}.$$

Această valoare a lui y o introducem în (1) şi obţinem

$$x = \frac{A - py}{p+1} = \frac{Ap - B}{p+1}$$

şi am regăsit valorile determinate prin prima metodă.

2. Pentru eliminarea lui p între ecuaţiile (1) şi (2), scoatem valoarea p din prima ecuaţie,

$$p = \frac{A - x}{x + y}$$

şi o introducem în (2) care devine, după înmulţirea cu $(x+y)^2$,

$$(A-x)^2 x - (x+y)^2 x + (A-x)^2 y - B(x+y)^2 = 0,$$

$$(A-x)^2 (x+y) - (x+y)^2 (x+B) = 0.$$

După simplificarea cu $(x+y)$, rămîne

$$(A-x)^2 - (x+y)(x+B) = 0;$$

acesta este rezultatul eliminării lui p dintre ecuaţiile (1) şi (2), care se mai scrie

$$y = \frac{A^2 - (2A+B)x}{x+B},$$

adică y este o funcţie omografică de x.

3. Pentru $A = 2$ şi $B = -1$, ultima ecuaţie devine:

$$y = \frac{-3x+4}{x-1}, \quad \text{sau} \quad y + 3 = \frac{7}{x-1},$$

a cărei reprezentare grafică este o hiperbolă echilateră, asimtotă la dreptele $x - 1 = 0$ şi $y + 3 = 0$, ceea ce se vede uşor dacă trecem de la sistemul de referinţă xoy la sistemul XOY definit de ecuaţiile $X = x - 1$, $Y = y + 3$.

4. Prin ipoteză $x = y$ şi $A = p^2 - 1$, $B = p^3$, deci

$$\frac{Ap - B}{p+1} = \frac{B - A(p-1)}{p},$$

$$\frac{p(p^2-1) - p^3}{p+1} = \frac{p^3 - (p^2-1)(p-1)}{p};$$

după aducerea la același numitor și reducerea termenilor asemenea,

$$p^3 + 3p^2 - 1 = 0;$$

aceasta este ecuația a cărei rădăcină pozitivă trebuie calculată cu două zecimale exacte. Însemnăm

$$z = p^3 + 3p^2 - 1,\ z' = 3p^2 + 6p.$$

Derivata z' se anulează pentru $p = -2$ și $p = 0$ și putem forma tabela de variație

p	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

de unde se vede că ecuația $z = 0$ are toate trei rădăcinile reale și anume : o rădăcină mai mică decît -2, o rădăcină cuprinsă între -2 și 0, iar a treia rădăcină este pozitivă. Observăm că $z(0) = -1 < 0$, $z(1) = 3 > 0$, deci rădăcina căutată se găsește situată între 0 și 1 ; pentru a micșora intervalul calculăm $z\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} < 0$, deci rădăcina se găsește între 0,5 și 1.

Figurăm arcul AB de ecuație $z = p^3 + 3p^2 - 1$ cuprins între punctele $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ și B (1,3), fie C și D proiecțiile lor pe axa Op ; derivata secundă $z'' = 6p + 6 > 0$ pentru punctele arcului AB, concavitatea lui este deci îndreptată în sus. Rădăcina căutată este egală cu abscisa punctului de intersecție al arcului AB cu axa Op ; o valoare apropiată, prin lipsă, a rădăcinii este egală cu abscisa punctului C_1 de intersecție al *coardei* AB cu axa Op. Ecuația *coardei* AB este

$$z + \frac{1}{8} = \frac{3 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{1}{2}\right)}$$

și dacă facem $z = 0$, adică luăm intersecția ei cu axa Op, găsim

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = 0{,}52.$$

O valoare apropiată, prin adaos, a rădăcinii este egală cu abscisa punctului D_1 de intersecție al axei Op cu tangenta în A la arcul AB. Coeficientul unghiular al tangentei în punctul curent al arcului AB este egal cu $z' = 3p^2 + 6p$, deci coeficientul unghiular al tangentei AD_1 este $z'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{6}{2} = \frac{15}{4}$. Ecuația tangentei AD_1 este deci

$$z + \frac{1}{8} = \frac{15}{4}\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

și dacă facem $z = 0$, găsim pentru abscisa punctului D_1,

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = 0{,}533\ldots$$

Valoarea *exactă* a rădăcinii căutate este cuprinsă în intervalul

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{13}{25} < p < \frac{8}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}.$$

Pentru a obține o mai bună aproximație, determinăm pe curbă punctele A_1 și B_1, ale căror abscise sînt respectiv $\frac{13}{25}$ și $\frac{8}{15}$; coordonatele lor sînt:

$$A_1\left(\frac{13}{25}, -\frac{753}{15\,625}\right),\quad B_1\left(\frac{8}{15}, \frac{11}{3\,375}\right).$$

Înlocuim intervalul inițial $CD = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ cu intervalul $C_1D_1 = \frac{8}{15} - \frac{13}{25} = \frac{1}{75}$, adică înlocuim arcul AB cu arcul A_1B_1, asupra căruia repetăm operațiile care vor duce la punctele C_2 și D_2, unde C_2 este intersecția axei absciselor cu coarda A_1B_1, iar D_2 este intersecția axei absciselor cu tangenta în A_1 la arcul A_1B_1 etc.

În felul acesta putem determina din aproape în aproape un șir de intervale CD, C_1D_1, $C_2D_2, \ldots$, ordinea de succesiune a punctelor fiind

$$C < C_1 < C_2 < \ldots < p < \ldots < D_2 < D_1 < D,$$

deci putem determina valoarea rădăcinii p cu o aproximație arbitrar de mică.

Cum se cere valoarea rădăcinii numai cu două zecimale exacte, ne oprim la intervalul C_1D_1, adică

$$0{,}52 < p < 0{,}533\,3\ldots$$

Însă $z(0{,}53) = (0{,}53)^3 + 3\,(0{,}53)^2 - 1 = 0{,}991\,577 - 1 < 0$, deci

$$0{,}53 < p < 0{,}533\,3\ldots$$

adică valoarea aproximativă a rădăcinii p, cu două zecimale, exacte, prin lipsă, este $p = 0{,}53$.

IV.28. *Se consideră funcția*

$$y = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2px + q},$$

1. *Să se determine parametrii a, b, p, q astfel încît funcția să aibă pentru $x = -1$ o valoare maximă egală cu 2, iar pentru $x = +1$, o valoare minimă egală cu 4.*

2. *Să se reprezinte apoi grafic variația funcției ce satisface la condițiile de mai sus.*

3. *Să se determine, cu două zecimale exacte, abscisa punctului de intersecție cel mai la stînga, dintre curba reprezentativă a funcției de la $+2$ și dreapta $y = x + 5$.*

Soluție. 1. Dacă facem împărțirea celor două trinoame, găsim cîtul 1 și restul $2\,(a - p)x + b - q$, deci y se mai scrie

$$y = 1 + \frac{2\,(a - p)\,x + b - q}{x^2 + 2px + q}$$

și dacă însemnăm $u = 2\,(a - p)\,x + b - q$, $v = x^2 + 2p + q$, deducem $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, iar dacă mai departe punem $U = u'v - uv'$, $V = v^2$, deducem $y'' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

Se zice că pentru $x = x_0$ funcția y este *staționară*, dacă $y' = 0$ pentru $x = x_0$; o condiție necesară ca funcția y să fie *extremă*, adică maximă sau minimă, pentru $x = x_0$, este ca ea să fie staționară în acest punct. Valorile lui x care fac funcția y staționară sînt deci rădăcinile ecuației $y' = 0$ sau $u'v - uv' = 0$ sau $U = 0$, adică

$$2(a - p)\,[x^2 + 2px + q] - [2\,(a - p)x + b - p]\,2\,(x + p) = 0$$

sau

$$U = -2\,(a - p)\,x^2 - 2\,(b - q)\,x + 2\,(aq - pb) = 0.$$

Prin ipoteză funcția y este extremă, deci staționară, pentru $x = \pm 1$, deci rădăcinile x_1 și x_2 ale ultimei ecuații sînt $x_1 = -1$, $x_2 = +1$; rezultă $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = -1$ sau folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

$$-\frac{b-q}{a-p} = 0, \quad -\frac{aq-bp}{a-p} = -1.$$

Presupunînd $a - p \neq 0$, deducem sistemul

$$b - q = 0, \ (aq - pb) = a - p$$

de unde scoatem $b = q = 1$.

Însă y' este egal cu cîtul $\frac{U}{V}$ și $U = 0$ pentru $x = \pm 1$; pentru ca $y' = 0$ pentru $x = \pm 1$, trebuie ca $V \neq 0$ pentru $x = \pm 1$ deci o altă condiție necesară este $1 \pm 2p + q \neq 0$ sau înlocuind $q = 1$,

$$p \neq \pm 1.$$

Pentru $x = \pm 1$, valoarea lui y'' devine, ținînd seama că $U = 0$, $y'' = \frac{U'}{V}$ sau

$$y'' = \frac{4(p-a)x + 2(q-b)}{(x^2 + 2px + q)^2}$$

care pentru $b = q = 1$ devine

$$y'' = \frac{4(p-a)x}{(x^2 + 2px + 1)^2}.$$

Derivata y'' este egală cu un cît în care numitorul este pozitiv deci semnul lui y'' depinde de semnul numărătorului $4(p-a)x$, care pentru $x = -1$ și $x = +1$ ia respectiv valorile $-4(p-a)$ și $+4(p-a)$. Prin ipoteză funcția y este maximă pentru $x = -1$; deci $y''(+1) = -4(p-a) < 0$ și minimă pentru $x = +1$ deci $y''(+1) = +4(p-a) > 0$. Ambele condiții sînt îndeplinite dacă $p - a > 0$.

În rezumat, condițiile $a - p \neq 0$, $p \neq \pm 1$, $p - a > 0$ se reduc la

$$p - a > 0, \quad p \neq \pm 1.$$

Prin ipoteză $y(-1) = 2$ și $y(+1) = 4$, deci înlocuind $b = q = 1$,

$$\frac{1 - 2a + 1}{1 - 2p + 1} = 2, \quad \frac{1 + 2a + 1}{1 + 2p + 1} = 4,$$

şi din acest sistem de două ecuaţii cu două necunoscute a şi p deducem $1 - a = 2 - 2p, 1 + a = 4 + 4p$; $a = -5, p = -2$.

Valorile numerice ale celor patru parametri sînt:

$$a = -5,\ b = 1,\ p = -2,\ q = 1,$$

iar condiţiile de posibilitate ale problemei sînt îndeplinite pentru că

$$p - a = -2 + 5 = 3 > 0,\ p = -2 \neq \pm 1.$$

Funcţia dată y devine

$$y = \frac{x^2 - 10x + 1}{x^2 - 4x + 1} = \frac{1 - 6x}{x^2 - 4x + 1}.$$

2. Trinomul de la numărător, $x^2 - 10x + 1$, se anulează pentru $x = 5 \pm 2\sqrt{6}$, iar trinomul de la numitor, $x^2 - 4x + 1$, pentru $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Pe de altă parte, dacă $x \to \pm\infty$, $y \to 1$, deci curba are o asimptotă paralelă cu Ox, de ecuaţie $y = 1$, şi două asimptote paralele cu Oy, de ecuaţii respectiv

$$x = 2 - \sqrt{3} \text{ şi } x = 2 + \sqrt{3}.$$

Tabela de variaţie a funcţiei este:

x	$-\infty$	-1	0	$5 - 2\sqrt{6}$	$2 - \sqrt{3} - 0$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$1 + 0$	2	1	0	$-\infty$

x	$2 - \sqrt{3} + 0$	1	$2 + \sqrt{3} - 0$	$2 + \sqrt{3} + 0$	$5 + 2\sqrt{6}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	4	$+\infty$	$-\infty$	0	$1 - 0$

Cu ajutorul acestei tabele, se poate construi uşor curba.

3. Abscisele punctelor de intersecţie dintre curbă şi dreapta $y = x + 5$ sînt date de ecuaţia

$$\frac{x^2 - 10x + 1}{x^2 - 4x + 1} = x + 5 \quad \text{sau} \quad P(x) = x^3 - 9x + 4 = 0.$$

Se vede pe figură că punctul de intersecţie cel mai la stînga are abscisa cuprinsă între -4 şi -3; într-adevăr

$P(-4) = -24$; $P(-3) = 4$. Curba trece prin punctele $A(-4, -24)$ şi $B(-3, 4)$ şi pentru că în intervalul $-4 < x < -3$ avem $P''(x) = 6x < 0$, arcul AB are concavitatea îndreptată către y negativ.

Metoda părţilor proporţionale (metoda coardei) dă

$$\frac{h}{24} = \frac{1-h}{4} = \frac{1}{28},\ h = \frac{24}{28} = 0{,}8\ldots$$

$$P(-3{,}3) = -2{,}237;\ P(-3{,}2) = +0{,}032.$$

Metoda coardei aplicată la noul interval dă

$$h' = \frac{0{,}2237}{2{,}269} = 0{,}098\ldots$$

$$P(-3{,}21) = -0{,}186\,161 < 0,\ P(-3{,}20) = +0{,}032 > 0.$$

Rădăcina căutată este cuprinsă în intervalul $-3{,}21 < x < -3{,}20$, deci cu două zecimale exacte, prin lipsă, valoarea rădăcinii este

$$x = -3{,}21.$$

IV.29. *Se consideră funcţia*

$$y = x^2 + \frac{18}{x+2} - 19 \qquad (1)$$

şi se cere:

1. *Să se studieze variaţia acestei funcţii şi să se reprezinte grafic.*

2. *Să se arate că funcţia mai generală*

$$y = x^2 + 2\,\frac{(a+1)^2}{x+a} - 19 \qquad (2)$$

unde a este un parametru, dacă se anulează pentru $x = -1$, admite şi o valoare maximă sau minimă pentru $x = 1$.

3. *Să se afle, cu două zecimale exacte, abscisa punctului de intersecţie cel mai la dreapta dintre curba (1) şi prima bisectoare a axelor de coordonate.*

Soluţie. 1. Derivata $y' = 2x - \frac{18}{(x+2)^2}$ se anulează pentru valorile lui x egale cu rădăcinile ecuaţiei

$$x(x+2)^2 - 9 = 0,\quad x^3 + 4x^2 + 4x - 9 = 0.$$

Se vede că $x = 1$ este o rădăcină a ultimei ecuații, deci polinomul se divide cu $x - 1$, iar cîtul este $x^2 + 5x + 9$, care se mai scrie $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$ și reprezintă un număr pozitiv, oricare ar fi valoarea lui x. Putem deci scrie

$$y' = 2(x^2 + 5x + 9)\frac{x - 1}{(x + 2)^2}.$$

Derivata y' are semnul binomului $x - 1$, adică $y' \geqslant 0$ pentru $x \geqslant 1$ și $y' < 0$ pentru $x < 1$.

Funcția y se anulează pentru valorile lui x egale cu rădăcinile ecuației $x^2(x + 2) - 19(x + 2) + 18 = 0$ sau

$$x^3 + 2x^2 - 19x - 20 = 0,$$

care admite rădăcina $x = -1$, deci polinomul se divide cu $x + 1$, iar cîtul este $x^2 + x - 20$, care se anulează pentru $x = -5$ și $x = 4$, deci rădăcinile ecuației $y = 0$ sînt $x = -5$, $x = -1$, $x = 4$ și putem scrie

$$y = \frac{(x + 5)(x + 1)(x - 4)}{x + 2}.$$

Funcția este staționară pentru $x = 1$, pentrucă $y'(1) = 0$; funcția este *minimă* și egală cu -18 pentru $x = 1$ pentru că dacă însemnăm cu ε un număr pozitiv arbitrar de mic, avem

$$y'(1 - \varepsilon) < 0 \text{ și } y'(1 + \varepsilon) > 0.$$

Tabela de variație a funcției este

x	$-\infty$	-5	-2	-1	1	4	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
y	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	-18	0	$+\infty$

și reprezentarea grafică a funcției se deduce imediat din acest tabel.

2. O condiție necesară ca funcția y să fie extremă, adică maximă sau minimă, pentru $x = 1$, este ca ea să fie staționară,

adică derivata ei să se anuleze, pentru $x = 1$ sau $y'(1) = 0$. Însă

$$y'(x) = 2x - \frac{2(a+1)^2}{(x+a)^2}, \qquad y'(1) = 2 - 2\frac{(a+1)^2}{(1+a)^2} = 0;$$

$$y''(x) = 2 + 4\frac{(a+1)^2}{(x+a)^3}, \qquad y''(1) = 2 + \frac{4}{1+a} = 2\frac{a+3}{a+1}.$$

Condiția $y'(1) = 0$ arată că funcția $y(x)$ este staționară pentru $x = 1$, oricare ar fi valoarea lui a; dacă a este diferit de -3, $y''(1) \neq 0$ și funcția $y(x)$ este extremă și anume, maximă pentru $-3 < a < -1$ căci în acest caz $y''(1) < 0$ și minimă pentru $a < -3$ sau $-1 < a$ pentru că în acest caz $y''(1) > 0$.

Dacă $a = -3$ avem $y''(1) = 0$, $y'''(x) = -12\frac{(a+1)^2}{(x+a)^4}$, $y'''(1) = \frac{-12}{(a+1)^2} < 0$, adică prima derivată care nu se anulează pentru $x = 1$ este de ordinul trei, număr impar, deci funcția $y(x)$ nu este extremă pentru $x = 1$.

Dacă $a = -1$, funcția y se reduce la $y = x^2 - 19$, $y' = 2x$, $y'(1) = 2 \neq 0$, deci funcția $y(x)$ nu este staționară pentru $x = 1$ și *a fortiori* nu este extremă.

În rezumat, funcția $y(x)$ este extremă pentru toate valorile lui a, exceptînd valorile $a = -3$ și $a = -1$.

Prin ipoteză funcția y este egală cu zero pentru $x = -1$, adică

$$0 = (-1)^2 + 2\frac{(a+1)^2}{-1+a} - 19, \quad a^2 - 7a + 10 = 0$$

și ultima ecuație are rădăcinile $a = 2$ și $a = 5$. Aceste valori fiind diferite de valorile excepționale $a = -3$ și $a = -1$, funcția $y(x)$ este extremă pentru $x = 1$ și anume minimă pentru că ambele valori 2 și 5 sînt mai mari ca -1.

3. Din forma curbei se vede că bisectoarea axelor $y = x$ taie curba în trei puncte reale A, B, C ale căror abscise a, b, c sînt cuprinse respectiv în intervalele

$$-5 < a < -2, \qquad -2 < b < 0, \; 4 < c.$$

Se cere să se calculeze rădăcina c, adică rădăcina, mai mare ca 4, a ecuației

$$x^2 + \frac{18}{x+2} - 19 = x \text{ sau } f(x) = x^3 + x^2 - 21x - 20 = 0.$$

Avem $f(4) = 64 + 16 - 84 - 20 = -24 < 0$,

$$f(5) = 125 + 25 - 105 - 20 = +25 > 0,$$

urmează că rădăcina c este cuprinsă între 4 și 5, adică $4 < c < 5$.

Să considerăm pe curba $y = f(x)$ punctele $P(4, -24)$, $C(c, 0)$, $Q(5,25)$. Pe de altă parte,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 21, \quad f''(x) = 6x + 2$$

și în intervalul $4 < x < 5$, avem $f''(x) > 0$, deci concavitatea arcului PCQ este îndreptată către y pozitiv. Pentru a micșora intervalul în care se găsește rădăcina c, întrebuințăm *metoda coardei* și *metoda tangentei*: coarda PQ taie axa Ox în punctul p_1, de abscisă a_1, iar tangenta în Q la curbă taie axa Ox în punctul q_1 de abscisă b_1.

Coarda PQ are ecuația $y - 25 = 49\ (x - 5)$, care este verificată de coordonatele $(a_1, 0)$ ale punctului p_1, deci $0 - 25 = 49\ (a_1 - 5)$, $a_1 = 5 - \frac{25}{49} = 4{,}5$.

Tangenta Qq_1 în punctul Q la curbă, are ecuația $y - 25 = (3 \times 5^2 + 2 \times 5 - 21)(x - 5)$, care este verificată de coordonatele $(b_1, 0)$ ale punctului q_1, deci $0 - 25 = 64\ (b_1 - 5)$, $b_1 = 5 - \frac{25}{64} = 4{,}6$.

Ducem prin punctele p_1 și q_1 paralele la Oy; ele taie curba în punctele P_1, Q_1, ale căror ordonate sînt respectiv

$$f(4{,}5) = (4{,}5)^3 + (4{,}5)^2 - 21 \times 4{,}5 - 20 = -3{,}125 < 0,$$

$$f(4{,}6) = (4{,}6)^3 + (4{,}6)^2 - 21 \times 4{,}6 - 20 = +1{,}896 > 0.$$

Aplicăm aceeași metodă arcului P_1Q_1; coarda P_1Q_1 taie axa Ox în punctul p_2, de abscisă a_2, iar tangenta la curbă în punctul Q_1 taie axa Ox în punctul q_2, de abscisă b_2.

Punctele P_1 și Q_1 avînd coordonatele $P_1(4{,}5\ ;\ -3{,}125)$, $Q_1(4{,}6\ ;\ 1{,}896)$, ecuația coardei P_1Q_1 este

$$y - 1{,}896 = 50{,}21\ (x - 4{,}6), \quad a_2 = 4{,}6 - \frac{1{,}896}{50{,}21} = 4{,}562\ 24.$$

Tangenta la curbă în Q_1 are ecuația

$$y - 1{,}896 = [3 \times (4{,}6)^2 + 2 \times 4{,}6 - 21]\ (x - 4{,}6),$$

$$b_2 = 4{,}6 - \frac{1{,}896}{51{,}68} = 4{,}563\ 31.$$

Rădăcina căutată c este cuprinsă între a_2 și b_2, adică

$$4{,}562\,24 < c < 4{,}563\,31$$

sau cu două zecimale exacte, $c = 4{,}56$.

IV.30. *Se consideră funcția*

$$y = x^3(x - a)^2$$

și se cere

1. *Să se studieze variația acestei funcții și să se reprezinte grafic această variație cînd* $a = 2$.

2. *Să se deducă din studiul de mai sus, numărul rădăcinilor reale pe care le poate avea ecuația*

$$x^3 (x - a)^2 - b = 0,$$

după diferitele valori ale lui b.

3. *Să se afle, cu două zecimale exacte, rădăcinile reale ale ecuației*

$$x^3 (x - 2)^2 = 1\,000.$$

Soluție. 1. Însemnăm $f(x) = x^3 (x - a)^2 = x^5 - 2ax^4 + a^2x^3$ și avem

$$f'(x) = 5x^4 - 8ax^3 + 3a^2x^2 = x^2 (x - a)(5x - 3a),$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24ax^2 + 6a^2x = 2x(10x^2 - 12ax + 3a^2),$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 48ax + 6a^2 = 6(10x^2 - 8ax + a^2).$$

Funcția este staționară pentru valorile lui x care anulează derivata $f'(x)$, adică pentru rădăcinile ecuației

$$x^2 (x - a)(5x - 3a) = 0, \text{ deci } x_1 = 0,\ x_2 = a,\ x_3 = \frac{3a}{5}.$$

Funcția $f(x)$ nu este extremă, adică nici maximă nici minimă pentru $x = 0$, pentru că $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6a_2 \neq 0$, adică prima derivată diferită de zero este de ordin impar. Acest lucru se poate vedea direct pe forma ecuației, pentru că dacă x este mic, termenii în x^4 și x^5 sînt neglijabili față de termenul a^2x^3, deci în vecinătatea originii, ecuația curbei este aproximativ $y = ax^3$, care reprezintă o cubică tangentă în origină la Ox, este situată în primul și al treilea cadran și are origina O ca centru de simetrie.

Pentru $x = a$, $f''(a) = 2a^3 \neq 0$, deci funcția $f(x)$ este extremă și anume, maximă dacă $a < 0$ și minimă dacă $a > 0$.

Pentru $x = \frac{3a}{5}$, $f''\left(\frac{3a}{5}\right) = -\frac{18a^3}{25} \neq 0$, deci funcția $f(x)$ este extremă și anume, minimă dacă $a < 0$ și maximă dacă $a > 0$.

Dacă $a = 0$, funcția se reduce la $y = x^5$ și curba corespunzătoare este tangentă în origină la Ox, este situată în primul și al treilea cadran și admite originea O ca centru de simetrie.

Dacă $a = 2$, putem forma tabela de variație a funcției

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		0		$\frac{3\,456}{3\,125}$		0		$+\infty$

iar reprezentarea grafică a funcției se deduce imediat din această tabelă.

2. Dacă a este un număr oarecare, $f(a) = 0$, iar

$$f\left(\frac{3a}{5}\right) = \frac{108a^5}{3\,125}.$$

Pentru discuție vom presupune trei cazuri după cum parametrul a este negativ, pozitiv sau nul.

Dacă $a < 0$, tabela de variație este

x	$-\infty$	a		$\frac{3a}{5}$		0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	0		$\frac{108a^5}{3\,125}$		0	$+\infty$

și din forma curbei deducem numărul punctelor reale de intersecție dintre curbă și dreapta $y = b$, după diferitele valori ale lui b, și abscisele acestor puncte sînt rădăcinile reale ale ecuației $x^3(x - a)^2 = b$.

$b < \frac{108a^5}{3\,125}$; o rădăcină reală $< a$;

$b = \frac{108a^5}{3\,125}$; 3 rădăcini reale, una $< a$ și celelalte două egale cu $\frac{3a}{5}$;

$\frac{108a^5}{3\,125} < b < 0$; 3 rădăcini reale, una $< a$; a doua cuprinsă între a şi $\frac{3a}{5}$, a treia cuprinsă între $\frac{3a}{5}$ şi 0;

$b = 0$; 5 rădăcini reale, două egale cu a, trei egale cu 0;

$0 < b$; o rădăcină reală > 0.

Dacă $a > 0$, tabela de variaţie este

x	$-\infty$	0		$\frac{3a}{5}$		a	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0		$\frac{108a^5}{3\,125}$		0	$+\infty$

şi din forma curbei deducem numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3(x-a)^2 = b$.

$b < 0$; o rădăcină reală < 0;

$b = 0$; 5 rădăcini reale, trei egale cu 0, două egale cu a;

$0 < b < \frac{180a^5}{3\,125}$; 3 rădăcini reale, una cuprinsă între 0 şi $\frac{3a}{5}$, alta cuprinsă între $\frac{3a}{5}$ şi a, a treia $> a$;

$b = \frac{108a^5}{3\,125}$; 3 rădăcini reale, două egale cu $\frac{3a}{5}$, a treia $> a$;

$\frac{108a^5}{3\,125} < b$; o rădăcină reală $> a$.

Presupunem că am construit curba C de ecuaţie $y = x^3(x-a)^2$ simetrica ei C' în raport cu originea O are ca ecuaţie, ecuaţia dedusă din precedenta prin înlocuirea coordonatelor (x, y) prin $(-x, -y)$, curba C' are ecuaţia

$$-y = (-x)^3 (-x-a)^2 \text{ sau } y = x^3 (x+a)^2.$$

Prin urmare, curbele C şi C', care corespund respectiv la valorile a şi $-a$ ale parametrului, sînt una simetrică celeilalte în raport cu originea O, deci discuţia cazului $a < 0$ se putea deduce din discuţia cazului $a > 0$.

3. Pentru $a = 2$, $b = 1\,000$ avem

$$\frac{108a^5}{3\,125} = \frac{3\,456}{3\,125} < 1\,000 = b,$$

deci ecuația $f(x) = x^3(x-2)^2 - 1\,000 = 0$, are o singură rădăcină reală $r > 2$.

$$f(4) = 4^3(4-2)^2 - 1\,000 = 64 \times 4 - 1\,000 = -744 < 0,$$
$$f(5) = 5^3(5-2)^2 - 1\,000 = 125 \times 9 - 1\,000 = +125 > 0,$$

deci $4 < r < 5$; din compararea valorilor -744 și $+125$ deducem că rădăcina r se găsește în vecinătatea lui 5. Calculăm $f(4{,}9) = (4{,}9)^3(2{,}9)^2 - 1\,000 = 117{,}649 \times 8{,}41 - 1\,000 = -10{,}571\,91$, deci $4{,}9 < r < 5$; rădăcina r este în vecinătatea lui 4,9; calculăm $f(4{,}91) = (4{,}91)^3 \times (2{,}91)^2 - 1\,000 = 118{,}370\,771 \times 8{,}468\,1 - 1\,000 = +2{,}375\,525\,905\,1 > 0$, deci $4{,}90 < r < 4{,}91$, adică valoarea rădăcinii, r cu două zecimale prin lipsă, este $r = 4{,}90$.

IV.31. *Se consideră funcția*

$$f(x) = ax(x-b)(x-c).$$

1. *Să se determine parametrii b, c astfel ca funcția să fie maximă pentru $x = \frac{4}{3}$ și minimă pentru $x = 6$.*

Să se determine parametrul a știind că valoarea minimă a funcției este egală cu -6.

2. *Să se reprezinte grafic funcția $y = f(x)$ astfel determinată.*

3. *Să se determine parametrul d astfel ca pentru această funcție particulară $f(x)$, ecuația $f(x) - d = 0$ să aibă o rădăcină dublă și să se rezolve ecuația în acest caz particular.*

Soluție. 1. Funcția $f(x)$ este un polinom de gradul al treilea, deci o funcție continuă pentru toate valorile variabilei; o condiție necesară ca ea să fie extremă, adică maximă sau minimă este ca ea să fie staționară.

Funcția $f(x)$ este staționară, pentru valorile lui x care anulează derivata

$$f'(x) = a[3x^2 - 2(b+c)x + bc] = 0.$$

Prin ipoteză funcția este extremă, deci staționară, pentru $x = \frac{4}{3}$ și $x = 6$, urmează că aceste valori sînt rădăcinile ultimei ecuații, deci formînd suma și produsul rădăcinilor avem

$$\frac{4}{3} + 6 = \frac{2(b+c)}{3}, \quad \frac{4}{3} \cdot 6 = \frac{bc}{3}$$

de unde scoatem $b + c = 11$ şi $bc = 24$, deci $b = 3$ şi $c = 8$. Deducem

$$f''(x) = 2a[3x - (b + c)] = 2a(3x - 11),$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = -14a,\ f''(6) = 14a.$$

Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie maximă pentru $x = \frac{4}{3}$ şi minimă pentru $x = 6$, trebuie să avem

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) < 0 \text{ şi } f''(6) > 0$$

şi aceste două condiţii sînt îndeplinite cînd $a > 0$.

Pentru $x=6$, valoarea funcţiei $f(x)=ax\,(x-3)\,(x-8)$ este

$$f(6) = 6a\ (6 - 3)\ (6 - 8) = -36a$$

prin ipoteză egală cu -6, de unde deducem $a = \frac{1}{6}$.

2. Dacă înlocuim parametrii a, b, c cu valorile numerice găsite, funcţia $y = f(x)$ devine

$$y = \frac{x(x-3)(x-8)}{6}$$

pentru care putem întocmi următoarea tabelă de variaţie

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	3	6	8	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$ $+$
y	$-\infty$	0	$\frac{200}{81}$	0	-6	0	$+\infty$

Cu ajutorul acestei tabele de variaţie, curba C de ecuaţie $y = f(x)$ se construieşte cu uşurinţă (fig. 47).

3. Din forma curbei C putem deduce, fără calcul, numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) - d = 0$ pentru diferitele valori ale parametrului d.

Dreapta $y = d$ este paralelă la Ox şi dacă $d < -6$, dreapta taie curba într-un singur punct, deci ecuaţia noastră are o singură rădăcină reală.

Dacă $d = -6$, dreapta este tangentă la curbă în punctul $m(6, -6)$ şi mai taie curba încă într-un punct $m_1(-1, -6)$,

ceea ce revine a spune că ecuația are o rădăcină dublă egală cu 6 și o rădăcină simplă egală cu -1.

Dacă $-6 < d < \frac{200}{81}$, dreapta taie curba în trei puncte, deci ecuația noastră are trei rădăcini reale.

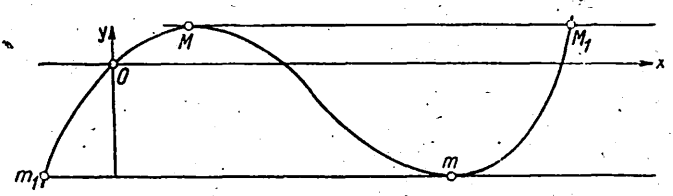


Fig. 47

Dacă $d = \frac{200}{81}$, dreapta este tangentă la curbă în punctul $M\left(\frac{4}{3}, \frac{200}{81}\right)$ și mai taie curba încă într-un punct $M_1\left(\frac{25}{3}, \frac{200}{81}\right)$, ceea ce revine a spune că ecuația are o rădăcină dublă egală cu $\frac{4}{3}$ și o rădăcină simplă egală cu $\frac{25}{3}$.

Dacă $\frac{200}{81} < d$, dreapta taie curba într-un singur punct, deci ecuația are o singură rădăcină reală.

Această discuție poate fi cuprinsă în tabela următoare:

$d < -6$ ... o rădăcină;

$d = -6$ ... o rădăcină dublă $= 6$ și o rădăcină simplă -1;

$-6 < d < \frac{200}{81}$ ... 3 rădăcini;

$d = \frac{200}{81}$ ... o rădăcină dublă $= \frac{4}{3}$ și o rădăcină simplă $\frac{25}{3}$;

$\frac{200}{81} < d$ ... o rădăcină.

IV.32. 1. *Să se discute variația funcției*

$$y = \frac{9(x^2 - 10)}{x^3 - 9x}$$

și să se reprezinte grafic această variație.

2. *Să se discute apoi ecuația*

$$x^3 - \lambda x^2 - 9x + 10\lambda = 0,$$

stabilind natura rădăcinilor ei după valorile parametrului real λ.

Soluție. 1. Funcția dată $y = y(x)$ se mai scrie

$$y = \frac{9(x^2 - 10)}{(x^2 - 9)x}.$$

și sub această formă se vede că $y(-x) = -y(x)$, adică funcția este impară, rezultă că diagrama C a funcției date are un centru de simetrie, origina O, adică diagrama C se compune din două ramuri C_1 și C_2, simetrice în raport cu O; construim ramura C_1 corespunzătoare lui x variabil în intervalul $0 < x < \infty$, iar ramura C_2, este simetrică lui C_1 în raport cu origina O.

Derivata

$$y' = -\frac{9(x^4 - 21x^2 + 90)}{(x^3 - 9x)^2}.$$

Funcția este staționară pentru valorile lui x care anulează derivata, adică pentru

$$x^2 = 6 \text{ și } x^2 = 15$$

sau, în intervalul $0 < x < \infty$, pentru

$$x = \sqrt{6} \quad \text{și} \quad x = \sqrt{15}$$

și la aceste valori ale lui x corespund pentru y valorile

$$y = 2\sqrt{6} \text{ și } y = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Pentru a vedea dacă în aceste puncte, funcția este extremă, adică maximă sau minimă, calculăm derivata secundă și apoi valorile numerice ale lui y'' pentru $x = \sqrt{6}$ sau $x = \sqrt{15}$. Calculul acestor valori numerice se simplifică observînd că y' este un raport,

$$y' = \frac{u}{v}, \text{ deci } y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

însă $u = -9(x^4 - 21x^2 + 90)$ se anulează pentru $x = \sqrt{6}$ sau $x = \sqrt{15}$, iar y'' devine

$$y'' = \frac{u'}{v} = \frac{18x(-2x^2 + 21)}{(x^3 - 9x)^2}.$$

Numitorul fiind un pătrat perfect este pozitiv, iar factorul $18x$ de la numărător este pozitiv pentru x pozitiv; rămîne că semnul lui y'' pentru $x = \sqrt{6}$ sau $x = \sqrt{15}$ este dat de $-2x^2 + 21$ care pentru $x^2 = 6$ este pozitiv, iar pentru $x^2 = 15$ negativ, deci

pentru $x = \sqrt{6}$, $y'' < 0$, $y = 2\sqrt{6}$, este un minim m;

pentru $x = \sqrt{15}$, $y'' < 0$, $y = \frac{\sqrt{15}}{2}$ este un maxim M.

În intervalul $0 \leqslant x < \infty$, y se anulează pentru $x^2 = 10$, deci $x = \sqrt{10}$ şi devine infinit pentru $x(x^2 - 9) = 0$, deci $x = 0$ şi $x = 3$.

Dacă $x = \varepsilon$ este pozitiv şi foarte mic, y este comparabil cu $\frac{10}{3}$, care este pozitiv şi foarte mare; dacă $x = 3 \mp \varepsilon$, y este comparabil cu $\frac{\pm 1}{2\varepsilon}$, care este pozitiv sau negativ, însă foarte mare în valoare absolută. În rezumat, dacă

$$x \to 0 + 0, \quad y \to + \infty;$$
$$x \to 3 - 0, \quad y \to + \infty;$$
$$x \to 3 + 0, \quad y \to - \infty;$$

unde notaţia $x \to a - 0$ înseamnă că x tinde către a prin valori mai mici ca a, iar $x \to a + 0$, prin valori mai mari ca a.

Discuţia de mai sus poate fi concentrată în tabela

x	0	$\sqrt{6}$	3	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{15}$	$+\infty$
y	$+\infty$ descreşte	$m = 2\sqrt{6}$	creşte $+\infty$	$-\infty$ creşte	0 creşte	$M = \frac{\sqrt{15}}{2}$	descreşte 0

şi cu ajutorul acestei tabele construim uşor ramura C_1; construim apoi simetrica lui C_1 în raport cu originea O şi obţinem ramura C_2.

2. Dacă rezolvăm ecuaţia în raport cu parametrul λ obţinem

$$\lambda = \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 10}$$

şi dacă însemnăm apoi $\eta = \frac{9}{\lambda}$, deducem

$$\eta = 9\,\frac{x^2 - 10}{x^3 - 9x}$$

şi numărul rădăcinilor reale ale acestei ecuaţii, pentru diferitele valori ale parametrului η, este egal cu numărul punctelor de intersecţie ale diagramei C cu dreapta $y = \eta$.

Cînd η este egal cu ordonata $2\sqrt{6}$ a punctului m, ecuaţia corespunzătoare este

$$x^3 - \frac{9x^2}{2\sqrt{6}} - 9x + \frac{45}{\sqrt{6}} = 0$$

care are două rădăcini egale cu abscisa $\sqrt{6}$ a punctului m, însă produsul rădăcinilor este $-\frac{45}{\sqrt{6}}$, deci a treia rădăcină este $-\frac{5\sqrt{6}}{4}$

Cînd η este egal cu ordonata $\frac{\sqrt{15}}{2}$ a punctului M, ecuaţia corespunzătoare este

$$x^3 - \frac{18x^2}{\sqrt{15}} - 9x + \frac{180}{\sqrt{15}} = 0,$$

care are două rădăcini egale cu abscisa $\sqrt{15}$ a punctului M, iar a treia rădăcină este $-\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

Diagrama C fiind simetrică în raport cu originea O (fig. 48) rezultă că rădăcinile ecuaţiei corespunzătoare la valoarea $-\eta$ a

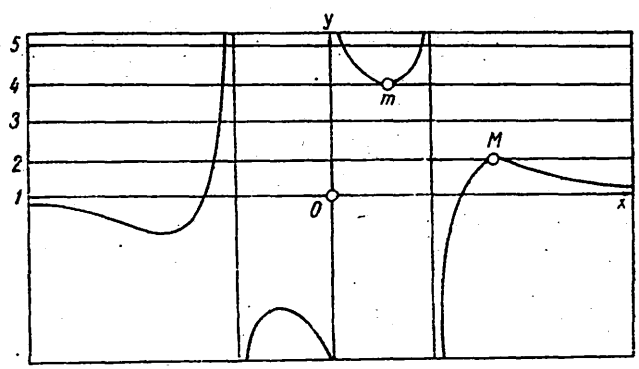


Fig. 48

parametrului, sînt egale şi de semne contrarii rădăcinilor corespunzătoare la valoarea η; în discuţie ne putem deci limita la

valorile pozitive ale parametrului η și întocmi următorul tabel:

$0 \leqslant \eta < \frac{\sqrt{15}}{2}$, 3 rădăcini;

$\eta = \frac{\sqrt{15}}{2}$, o rădăcină dublă $= \sqrt{15}$ și o rădăcină simplă $=$

$= -4\frac{\sqrt{15}}{5}$;

$\frac{\sqrt{15}}{2} < \eta < 2\sqrt{6}$, o rădăcină;

$\eta = 2\sqrt{6}$, o rădăcină dublă $= \sqrt{6}$ și o rădăcină simplă $=$

$= -5\frac{\sqrt{6}}{4}$;

$2\sqrt{6} < \eta$, 3 rădăcini.

Valorile corespunzătoare pentru parametrul λ sînt următoarele, dacă citim tabela precedentă de jos în sus,

$0 \leqslant \lambda < 3\frac{\sqrt{6}}{4}$, 3 rădăcini;

$\lambda = 3\frac{\sqrt{6}}{4}$, o rădăcină dublă $= \sqrt{6}$ și o rădăcină simplă $=$

$= -5\frac{\sqrt{6}}{4}$;

$3\frac{\sqrt{6}}{4} < \lambda < 6\frac{\sqrt{15}}{5}$, o rădăcină;

$\lambda = 6\frac{\sqrt{15}}{5}$, o rădăcină dublă $= \sqrt{15}$ și o rădăcină simplă $= -4\frac{\sqrt{15}}{5}$;

$6\frac{\sqrt{15}}{5} < \lambda$, 3 rădăcini.

IV.33. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{x-a}{(x-b)^2} - \frac{b}{a^2} = \frac{x-b}{(x-a)^2} - \frac{a}{b^2}.$$

Soluție. Dacă însemnăm cu $R(x, a, b)$ funcția rațională

$$R(x, a, b) = \frac{x-a}{(x-b)^2} - \frac{b}{a^2},$$

ecuația dată se poate scrie

$$R(x, a, b) = R(x, b, a).$$

Observăm că

$$R(a+b, a, b) = \frac{b}{a^2} - \frac{b}{a^2} = 0,$$

$$R(a+b, b, a) = \frac{a}{b^2} - \frac{a}{b^2} = 0,$$

şi deducem că ecuaţia este verificată pentru $x = a + b$.

Ecuaţia este verificată şi pentru $x = 0$, pentru că

$$-\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} = -\frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2},$$

deci cunoaştem în total două rădăcini ale ecuaţiei şi anume 0 şi $a + b$.

Dacă aducem la acelaşi numitor, $R(x, a, b)$ este un raport în care numitorul este $a^2(x-b)^2$, iar numărătorul egal cu

$$-bx^2 + (a^2 + 2b^2)\, x - a^3 - b^3,$$

se împarte cu $(x - a - b)$ pentru că $R(a+b, a, b) = 0$, iar cîtul, schimbat de semn, este

$$\frac{bx - a^2 + ab - b^2}{a^2(x-b)^2}.$$

Dacă facem aceeaşi operaţie cu $R(x, b, a)$ şi suprimăm factorul $(-x + a + b)$, ecuaţia propusă se scrie

$$\frac{bx - a^2 + ab - b^2}{a^2(x-b)^2} = \frac{ax - b^2 + ba - a^2}{b^2(x-a)^2},$$

care admite rădăcina $x = 0$.

Eliminăm numitorii, suprimăm factorul x şi rămîne ecuaţia de gradul al doilea

$$x^2 - (a+b)\, x + ab\, \frac{2a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii, împreună cu rădăcinile 0 şi $a+b$, sînt cele patru rădăcini ale ecuaţiei propuse.

IV.34. *Pentru ce valori ale parametrului a, ecuaţia*

$$x^4 - 4x^2 + 4ax - 1 = 0, \qquad (1)$$

are o rădăcină dublă?

Soluție. Dacă x este rădăcina dublă a ecuației propuse, x este rădăcină simplă a ecuației derivate

$$x^3 - 2x + a = 0. \tag{2}$$

Eliminăm pe x între ecuațiile (1) și (2); pentru aceasta le adunăm membru cu membru, după ce le-am înmulțit respectiv cu 1 și $-x$, obținem

$$2x^2 - 3ax + 1 = 0. \tag{3}$$

Adunăm ecuațiile (2) și (3) după ce le-am înmulțit respectiv cu 2 și $-x$; obținem

$$3ax^2 - 5x + 2a = 0 \tag{4}$$

Adunăm ecuațiile (3) și (4) după ce le-am înmulțit respectiv cu $3a$ și -2 și obținem

$$(10 - 9a^2)\ x - a = 0, \tag{5}$$

de unde deducem pentru rădăcina comună a ecuațiilor (1) și (2),

$$x = \frac{a}{10 - 9a^2}. \tag{6}$$

Înlocuim în ecuația (3) pe x cu valoarea dată de ecuația (6) și obținem

$$108a^4 - 208a^2 + 100 = 0, \tag{7}$$

o ecuație de gradul al doilea în raport cu a^2, de unde deducem $a^2 = 1$ și $a^2 = \frac{25}{27}$, deci ecuația (1) are o rădăcină dublă pentru patru valori ale parametrului a:

$$a = \pm 1, \quad a = \pm 5\frac{\sqrt{3}}{9}. \tag{8}$$

Valorile corespunzătoare ale rădăcinii duble sînt date de ecuația (6), în care se înlocuiește a, pe rînd, cu valorile (8), se obține

$$x = \pm 1, \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pentru controlul calculului, se verifică ușor că aceste valori satisfac ecuațiile (1) și (2); de exemplu, pentru $x = 1$, $a = 1$, ecuațiile devin

$$1 - 4 + 4 - 1 = 0 \quad \text{și} \quad 1 - 2 + 1 = 0.$$

IV.35. *Să se găsească între ce limite trebuie să fie cuprins x astfel încît să avem*

$$-1 < \frac{2x^2-1}{x^2-1} < +1.$$

2. *Să se calculeze derivata funcției*

$$y = \arcsin\,(3x - 4x^3)$$

și să se arate că ea este egală cu de trei ori derivata lui arcsin x.

3. *Să se studieze variația funcției*

$y = e^{-ax}\sin bx$, pentru $x > 0$ (a și b pozitivi).

Să se construiască curba reprezentativă. Să se deducă condițiile ca ecuația $e^{-ax}\sin bx = c^2$ *să aibă două și numai două rădăcini pozitive.* Aplicație $a = b = 1$.

Soluție. 1. Inegalitățile simultane $\frac{2x^2-1}{x^2-1} < 1$ și $\frac{2x^2-1}{x^2-1} > -1$ sînt respectiv echivalente inegalităților

$$\frac{2x^2-1}{x^2-1} - 1 < 0 \quad \text{și} \quad \frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2 > -3$$

sau

$$(1) \quad \frac{x^2}{x^2-1} < 0 \quad \text{și} \quad (2) \quad \frac{1}{x^2-1} > -3$$

x fiind real, x^2 este pozitiv ; din inegalitatea (1) deducem că numitorul $x^2 - 1 < 0$; inegalitatea (2) devine, înmulțind ambii membri cu numărul pozitiv $1 - x^2$,

$$-1 > -3 + 3x^2 \text{ sau } x^2 < \frac{2}{3},$$

În rezumat, inegalitățile date sînt echivalente cu inegalitățile simultane

$$x^2 - 1 < 0 \quad \text{și} \quad x^2 < \frac{2}{3}$$

dintre care, prima este o consecință a ultimei, care se mai scrie

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2. $$y' = \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}} = 3\,\frac{1 - 4x^2}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-4x^2)^2}} =$$

$$= 3\,\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 3\,(\arcsin x)'.$$

3. Derivata funcţiei $y = e^{-ax} \sin bx$ este

$$y' = -ae^{-ax} \sin bx + b \cos bx e^{-ax} = e^{-ax}(-a \sin bx + b \cos bx).$$

Funcţia se anulează pentru $\sin bx = 0$, $x = \frac{k\pi}{b}$, $k = 0, 1, 2\ldots$ $\ldots$, iar derivata pentru $-a \sin bx + b \cos bx = 0$, $x = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} (\frac{b}{a} + k\pi)$, $k = 0, 1, 2\ldots$, unde $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ este determinaţia principală a funcţiei $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, adică arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$; însă a şi b sînt presupuşi pozitivi, deci $0 < \operatorname{arctg} \frac{b}{a} < \frac{1}{2}\pi$. Dacă însemnăm $x_{k+1} = \frac{k\pi}{b}$, $\xi_{k+1} = \frac{1}{b}\left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi\right)$, avem

$$x_k < \xi_k < x_{k+1} < \xi_{k+1}$$

inegalităţi care arată că rădăcinile derivatei separă rădăcinile funcţiei.

Pentru a avea valoarea lui y pentru o rădăcină a derivatei, din

$$y = e^{-ax} \sin bx, \quad -a \sin bx + b \cos bx = 0$$

deducem

$$ay = e^{-ax}\, a \sin bx, \quad ay = e^{-ax}\, b \cos bx,$$

$$y^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = e^{-2ax}, \quad y = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-ax}$$

şi dacă însemnăm prin η_{k+1} valoarea funcţiei pentru $x = \xi_{k+1}$, avem

$$\eta_{k+1} = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\frac{a}{b}\left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi\right)}.$$

Pentru a determina semnul lui η_{k+1}, formăm tabela

x	x_1	$+\xi_1$	x_2	ξ_2	$+x_3$	$+\xi_3$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	η_1	0	$-\eta_2$	0	η_3

de unde deducem că ordonatele η de rang impar sînt pozitive, iar cele de rang par negative.

Dacă însemnăm $q = e^{-\frac{a}{b}\pi} < 1$,

$$\eta_1 = \frac{+b}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}, \quad \eta_2 = -\eta_1 q, \quad \eta_3 = +\eta_1 q^2$$

şi în general,

$$\eta_{k+1} = \eta_1 (-q)^k$$

relaţie care arată că ordonatele η_{k+1} formează o progresie geometrică descrescătoare cu raţia $-e^{-\frac{a}{b}\pi}$. Construcţia curbei rezultă imediat din aceste proprietăţi.

Numărul rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei $e^{-ax}\sin bx - c^2 = 0$ este egal cu numărul punctelor de intersecţie ale curbei $y = e^{-ax}\sin bx$, $x > 0$, cu dreapta $y = c^2$. Se vede pe o figură că dacă $\eta_1 > c^2 > \eta_3$, avem două puncte de intersecţie, dacă $\eta_3 > c^2 > \eta_5$ avem patru puncte de intersecţie şi în general, dacă $\eta_{2k-1} > c^2 > \eta_{2k+1}$ avem $2k$ puncte de intersecţie. Pentru ca ecuaţia dată să aibă două rădăcini pozitive şi numai două trebuie ca

$$\eta_1 > c^2 > \eta_3$$

sau

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} > c^2 > \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-\frac{a}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+2\pi\right)}.$$

Dacă această condiţie are loc, prima rădăcină X_1 este cuprinsă în intervalul $0 < X_1 < \xi_1$, iar a doua rădăcină X_2 în intervalul $\xi_1 < X_2 < x_2$ adică

$$0 < X_1 < \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} < X_2 < \frac{\pi}{b}.$$

În cazul particular $a = b = 1$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}\pi} > c^2 > \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{9}{4}\pi}, \quad 0 < X_1 < \frac{1}{4}\pi < X_2 < \pi$$

IV.36. 1. *Să se determine constantele a și b așa ca polinomul*

$$x(x+1)(x+2)(x+a)+b$$

să fie pătratul unui polinom.

Să se deducă condițiile necesare și suficiente pentru ca rădăcinile ecuației

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+m=0$$

să fie toate reale și diferite.

2. *Să se studieze variația funcției* $y=e^{\frac{1}{x}}+\frac{x}{e}$ *cînd* x *variază de la* -1 *la* $+1$. *Se va reprezenta variația pe o figură.*

Soluție. 1. Trebuie să avem

$$x(x+1)(x+2)(x+a)+b=(x^2+px+q)^2.$$

Identificînd coeficienții acelorași puteri ale lui x găsim următoarele patru ecuații cu patru necunoscute a, b, p, q:

(1) $a+3=2p$, (2) $3a+2=p^2+2q$,

(3) $2a=2pq$, (4) $b=q^2$.

Relațiile (1) și (3) ne dau:

$$(5)\quad 2a=(a+3)\,q,$$

și ținînd seama de relația (4): (6) $2a=(a+3)\sqrt{b}$.

Din (1), (2) și (4) deducem

$$3a+2=\frac{(a+3)^2}{4}+2\sqrt{b}. \qquad (7)$$

Introducînd în (7) valoarea lui $\sqrt{b}$ scoasă din (6) obținem ecuația în a

$$3a+2=\frac{(a+3)^2}{4}+\frac{4a}{a+3} \qquad (8)$$

sau

$$a^3-3a^2-a+3=0 \qquad (9)$$

cu rădăcinile $a=+1$ și $a=3$.

Găsim următoarele trei grupuri de soluții :

$$a = 1,\ b = \frac{1}{4},\ p = 2,\ q = \frac{1}{2}$$

$$a = -1,\quad b = 1,\quad p = 1,\quad q = -1$$

$$a = 3,\quad b = 1,\quad p = 3,\quad q = 1.$$

Ecuația $x(x+1)(x+2)(x+3) + m = 0$ se mai poate scrie

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 + (m-1) = 0,$$

sau ținînd seamă de al treilea grup de soluții de mai sus :

$$(x^2 + 3x + 1)^2 + m - 1 = 0,$$
$$x^2 + 3x + 1 \pm \sqrt{1-m} = 0.$$

O primă condiție ca rădăcinile acestei ecuații să fie toate reale și diferite este $m < 1$.

Punînd condiția ca discriminantul ecuației să fie real și diferit de zero, obținem

$$9 - 4(1 \pm \sqrt{1-m}) > 0,\quad \pm\sqrt{1-m} < \frac{5}{4}.$$

În definitiv avem condiția

$$-\frac{9}{16} < m < 1.$$

2. $y(x) = e^{\frac{1}{x}} + \frac{x}{e}$; $y'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{e}$;

$$y''(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} + 2\right).$$

Punctul $x = 0$, este punct de discontinuitate de primă speță pentru funcție și pentru derivată. Curba se compune deci din două ramuri.

$$f(+\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{e}\ ;\quad f(-\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}} - \frac{\varepsilon}{e}$$

$$f(+0) = \infty \quad ;\quad f(-0) = 0.$$

$$f(-1) = 0 \quad ;\quad f(1) = \frac{e^2+1}{e}$$

Exceptînd punctul de discontinuitate $x = 0$, derivata a doua y'' este negativă în intervalul $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ şi pozitivă în intervalele $\left(-\frac{1}{2}, -0\right)(+0, 1)$.

Deci prima ramură a curbei are în intervalul $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ concavitatea în jos iar în intervalul $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ concavitatea în sus.

Punctul de abscisă $x = -\frac{1}{2}$ este un punct de inflexiune. Tangenta în acest punct este dreapta de coeficient unghiular $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{e^2} + \frac{1}{e}$.

Prima ramură este tangentă la axa Ox în punctul de abscisă $x = -1$.

Cea de a doua ramură este asimptotă la axa Oy şi are concavitatea în sus.

Derivata y' se anulează pentru $x = -1$, descreşte pînă la $x = -\frac{1}{2}$, apoi creşte iarăşi tinzînd la $\frac{1}{e}$ cînd x tinde la 0 prin valori negative. Deci există o rădăcină r a ecuaţiei $y'(x) = 0$ cuprinsă între $-\frac{1}{2}$ şi 0.

În definitiv avem următoarea tabelă de variaţie a funcţiei:

x	-1		r		-0	$+0$		$+1$
y'	0	descreşte	minim	creşte	0	$+\infty$	descreşte	$\frac{e^2+1}{e}$
y'	0	$-$	0	$+$			$-$	

V.
TRIGONOMETRIA

V.1. *Se dă ecuația trigonometrică*

$$\cos 2x - \left(\frac{4p-6}{5} + \frac{2}{p-2}\right)\cos x + \frac{9p-16}{5(p-2} = 0$$

în care x este necunoscută, iar p un parametru.

1. *Să se verifice că dacă $p = 0$, ecuația are rădăcinile reale; să se calculeze valorile lui x în acest caz particular.*

2. *Există și alte valori ale lui p pentru care ecuația are rădăcinile reale?*

Soluție. 1. Înlocuim $\cos 2x$ prin $2\cos^2 x - 1$ și ecuația devine

$$2\cos^2 x - \left(\frac{4p-6}{5} + \frac{2}{p-2}\right)\cos x + \frac{4p-6}{5(p-2)} = 0$$

sau

$$\cos^2 x - \left(\frac{2p-3}{5} + \frac{1}{p-2}\right)\cos x + \frac{2p-3}{5(p-2)} = 0,$$

care este o ecuație de gradul al doilea în raport cu $\cos x$ și ale cărei rădăcini sînt

$$\cos x_1 = \frac{2p-3}{5} \text{ și } \cos x_2 = \frac{1}{p-2}.$$

Dacă $p = 0$, rădăcinile se reduc la

$$\cos x_1 = -\frac{3}{5} \text{ și } \cos x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Valorile x_1 și x_2 corespunzătoare pentru x sînt reale pentru că și $\left(-\frac{3}{5}\right)$ și $\left(-\frac{1}{2}\right)$ sînt numere cuprinse între -1 și $+1$.

Din ecuaţia $\cos x_2 = -\frac{1}{2}$ deducem $\cos(\pi - x_2) = \frac{1}{2}$, $\pi - x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ şi în general

$$x_2 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{sau} \quad x_2 = k \times 360° \pm 120°.$$

Din ecuaţia $\cos x_1 = -\frac{3}{5}$, deducem $\cos(\pi - x_1) = \frac{3}{5}$, sau punînd $\pi - x_1 = \varphi$, $\cos\varphi = \frac{3}{5} = 0{,}6$,

$$\lg\cos\varphi = 1{,}778\,15, \quad \varphi = 53°7'49'',5$$
$$x_1 = 180° - 53°7'49'',5 = 126°52'10'',5$$

şi în general

$$x_1 = k \times 360° \pm 126°52'10'',5.$$

2. Pentru ca valorile lui x_1 şi x_2 să fie reale, trebuie să avem $\cos^2 x_1 \leqslant 1$, $\cos^2 x_2 \leqslant 1$, adică

$$\frac{(2p-3)^2}{25} \leqslant 1, \quad \frac{1}{(p-2)^2} \leqslant 1$$

sau

$$(2p-3)^2 - 25 \leqslant 0, \quad (p-2)^2 - 1 \geqslant 0$$

sau

$$(2p-8)(2p+2) \leqslant 0, \quad (p-3)(p-1) \geqslant 0.$$

Primul trinom se mai scrie $4(p+1)(p-4)$ şi are rădăcinile -1 şi $+4$; el este negativ sau cel mult egal cu zero, pentru valorile lui p cuprinse între rădăcini, adică

$$-1 \leqslant p \leqslant 4.$$

Aceasta este condiţia ca x_1 să fie real.

Al doilea trinom $(p-1)(p-3)$ are rădăcinile $+1$ şi $+3$ şi este pozitiv sau cel puţin egal cu zero pentru valorile lui p exterioare intervalului determinat de rădăcini, adică

$$p \leqslant 1 \quad \text{sau} \quad 3 \leqslant p.$$

Aceasta este condiţia ca x_2 să fie real.

Dacă parametrul p ia toate valorile de la $-\infty$ la $+\infty$ putem forma următorul tabel recapitulativ :

$-\infty < p < -1,$	x_1 imaginar, x_2 real.
$-1 \leqslant p \leqslant 1,$	x_1 şi x_2 reali.
$1 < p < 3$	x_1 real, x_2 imaginar.
$3 \leqslant p \leqslant 4,$	x_1 şi x_2 reali.
$4 < p < +\infty,$	x_1 imaginar, x_2 real.

V.2. *Pe o cîmpie, considerată ca un plan orizontal, se află o ridicătură de pămînt în formă de mamelon, a cărei înălţime deasupra planului cîmpiei este necunoscută, iar pe vîrful mamelonului se află un copac, iarăşi de înălţime necunoscută.*

Se determină însă că, în momentul cînd înălţimea soarelui deasupra orizontului este $a = 52°45'20''$, *umbra copacului pe cîmpie are lungimea* $l = 10{,}45$ m, *iar copacul* AB *este văzut din punctul* B', *unde se proiectează umbra vîrfului său, sub unghiul* $\beta = 2°2'40''$. *Se cere :*

1. *Să se determine înălţimea* h *a copacului* AB.
2. *Să se determine înălţimea* H *a mamelonului, măsurată pe verticala copacului.*
3. *Presupunînd că soarele are o mişcare ascendentă în planul figurii, peste cît timp de la data observaţiei precedente, umbra copacului se va reduce la jumătate?*

Soluţie. 1. Însemnăm, în planul figurii, prin O piciorul perpendicularei AB pe planul cîmpiei, figurat prin linia orizontală $OA'B'$, unde $A'B'$ este umbra copacului. Conform ipotezei,

$$OA = H, \quad AB = h, \quad A'B' = l, \quad \sphericalangle OA'A = \sphericalangle OB'B = \alpha,$$
$$\sphericalangle AB'B = \beta.$$

Paralela AC dusă prin A la $A'B'$ taie dreapta BB' în C, deci $\sphericalangle ACB = \sphericalangle \alpha$ şi $AC = A'B' = l$, ca paralele cuprinse între paralele, iar din triunghiul dreptunghi BAC scoatem

$$AB = h = AC \operatorname{tg} \sphericalangle ACB = l \operatorname{tg} \alpha.$$
$$\lg h = \lg l + \lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 10{,}45 + \lg \operatorname{tg} 52°45'20'' =$$
$$= 1{,}01912 + 0{,}11904 = 1{,}13816,$$
$$h = 13{,}745 \text{ m}.$$

2. Din triunghiurile dreptunghice AOA' şi AOB' avem

$$OA = H = OA' \operatorname{tg} \alpha,$$
$$OA = H = (OA' + A'B') \operatorname{tg} (\alpha - \beta)$$

şi eliminînd pe OA' şi înlocuind $A'B' = l$,

$$H = (H \operatorname{ctg} \alpha + l) \operatorname{tg} (\alpha - \beta),$$
$$H [\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha - \beta)] = l \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha - \beta),$$
$$H = l \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \frac{1}{\sin \beta},$$

$$\lg H = \lg l + \lg \sin \alpha + \lg \sin (\alpha - \beta) - \lg \sin \beta =$$
$$= \lg 10{,}45 + \lg \sin 52°45'20'' + \lg \sin 50°42'40'' -$$
$$- \lg \sin 2°2'40'' = \bar{1}{,}019\,12 + \bar{1}{,}900\,94 + \bar{1}{,}888\,71 -$$
$$- \bar{2}{,}552\,35 = \bar{2}{,}256\,42,$$
$$H = 180{,}475 \text{ m}.$$

3. În momentul iniţial al observaţiei, înălţimea soarelui deasupra orizontului este α, iar lungimea umbrei copacului este l; aceste două numere sînt legate de înălţimea h a copacului prin relaţia

$$h = l \operatorname{tg} \alpha.$$

În momentul final al observaţiei, înălţimea soarelui deasupra orizontului este α', iar lungimea umbrei copacului este $l' = \frac{l}{2}$, şi aceste două numere sînt legate prin relaţia

$$h = l' \operatorname{tg} \alpha' \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg} \alpha' = 2 \frac{h}{l},$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha' = \lg 2 + \lg h - \lg l = 0{,}301\,03 + 1{,}138\,16 - 1{,}019\,21 =$$
$$= 0{,}420\,07, \quad \alpha' = 69°11'12''.$$

Fie T timpul, exprimat în ore, necesar soarelui să se ridice de la înălţimea $\alpha = 52°45'20''$ la înălţimea $\alpha' = 69°11'12''$; presupunînd că soarele descrie (în aparenţă) în 24 ore, cu viteza constantă, un cerc, adică înălţimea lui deasupra orizontului creşte cu 360°, obţinem ecuaţia

$$\frac{T}{24} = \frac{69°11'12'' - 52°45'25''}{360}$$

care exprimă că spațiile parcurse de soare pe orbita lui circulară (evident aparentă) sînt proporționale cu timpurile respective. Deducem

$$T = 24 \times \frac{16°25'52''}{360°}, \quad T = \frac{16 \text{ ore, } 25 \text{ minute, } 52 \text{ secunde,}}{15}.$$

Însă 16 ore, 25 minute, 52 secunde = 15 ore, 75 minute, 652 secunde, deci $T = 1$ oră, 5 minute, 43,4 secunde.

V.3. — *Bradule, te-a frînt furtuna! Cît de înalt ai fost?*
— *Nu știu, dar înainte, de-mi rîdea soarele sub un unghi de* 60° *lăsam umbră cît lungimea ce mi-a rămas; iar, acum, de-mi plînge sub un unghi de* 30°, *las doar* 20 m *peste ce-am pierdut!*
Să se afle înălțimea bradului.

Soluție. Fie $AC = x + y$ lungimea inițială a bradului, $AB = x$ lungimea lui finală, deci $BC = y$ lungimea pierdută. Cînd razele soarelci fac cu solul, presupus orizontal, un unghi $\alpha = 60°$, umbra bradului AC este $AD = x$, iar cînd razele soarelui fac cu solul, unghiul $\beta = 30°$, umbra bradului AB este $AE = y + a$ unde $a = 20$ m.

Din triunghiul dreptunghi CAD avem

$$CA = AD \times \operatorname{tg} \alpha, \quad y + x = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Din triunghiul dreptunghi BAE avem

$$BA = AE \times \operatorname{tg} \beta, \quad x = (y + a) \operatorname{tg} \beta.$$

Rămîne să rezolvăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute x și y:

$$y + x = x \operatorname{tg} \alpha, \quad x = (y + a) \operatorname{tg} \beta,$$

de unde scoatem:

$$x = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$y = \frac{a \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha - 1)}{1 + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$x + y = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

În cazul particular al problemei,

$$a = 60°, \quad \beta = 30°, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

deci

$$x = \alpha, \quad y = a(\sqrt{3} - 1), \quad x + y = a\sqrt{3},$$

sau înlocuind $a = 20$ m, $\sqrt{3} = 1{,}732$.

lungimea inițială $x + y = 34{,}64$ m,
lungimea finală $x = 20$ m,
lungimea pierdută $y = 14{,}64$ m.

În cazul particular al problemei se observă că unghiurile α și β fiind complementare, triunghiurile dreptunghice CAD și EAB sînt asemenea, pentru că au respectiv unghiurile egale; dar ele au catetele $AD = x = AB$, deci ele sînt egale, de unde rezultă că și celelalte catete sînt egale, adică $CA = EA$ sau $y + x = y + 20$, deci $x = 20$ m.

V.4. *Să se rezolve ecuația*

$$(p + 3)\cos 4x - (2p\sqrt{2} + 3\sqrt{2})\cos 2x + 2p + 3 = 0$$

și să se discute după diferitele valori ale parametrului p.

Să se calculeze în grade, minute și secunde, valorile lui x în cazul particular $p = \sqrt{2}$.

Soluție. Avem $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ și înlocuind, obținem ecuația de gradul al doilea în raport cu $\cos 2x$

$$2(p + 3)\cos^2 2x - (2p\sqrt{2} + 3\sqrt{2})\cos 2x + p = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$\frac{2p\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4(p + 3)}$$

adică

$$\cos 2x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 2x_2 = \frac{p\sqrt{2}}{2(p + 3)}.$$

Funcția cosinus variază între -1 și $+1$, deci x_1 și x_2 sînt reale dacă $-1 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant +1$ și $-1 \leqslant \frac{p\sqrt{2}}{2(p + 3)} \leqslant 1$

Prima condiție este îndeplinită, deci x_1 este real; a doua condiție se scrie $\frac{2p^2}{4(p+3)^2} \leqslant +1$, sau $p^2 \leqslant 2(p + 3)^2$, sau

$$p^2 + 12p + 18 \geqslant 0.$$

Rădăcinile trinomului, sînt $p = -6 \pm 3\sqrt{2}$; trinomul este pozitiv sau nul dacă

$$p \leqslant -6 - 3\sqrt{2} \quad \text{sau} \quad p \geqslant -6 + 3\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Aceasta este condiția ca x_2 să fie real; condiția se poate obține geometric în felul următor : x_2 este real dacă

$$-1 \leqslant \frac{p}{(p+3)\sqrt{2}} \leqslant +1 \text{ sau } -\sqrt{2} \leqslant \frac{p}{p+3} \leqslant +\sqrt{2}$$

și dacă punem $q = \frac{p}{p+3}$, ecuația de legătură dintre p și q se mai scrie $pq + 3q - p = 0$ și reprezintă, în raport cu axele rectangulare Op, Oq, o hiperbolă echilateră, cu centrul în punctul $(-3,1)$, cu asimptotele paralele la axele de coordonate și care trece prin origine. Dreapta $q = \sqrt{2}$, taie hiperbola în punctul $A(-6-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$, iar dreapta $q = -\sqrt{2}$, în punctul $B(-6+3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Fie A' și B' punctele de la $-\infty$ și $+\infty$ ale hiperbolei în direcția asimptotei orizontale. Pe o figură se vede că dacă ordonata q satisface condiția $-\sqrt{2} \leqslant q \leqslant \pm \pm\sqrt{2}$, punctul curent $M(p, q)$ de pe hiperbolă trebuie să se găsească pe arcul AA' sau pe arcul BB', adică abscisa p a punctului M trebuie să fie mai mică decît abscisa lui A sau să fie mai mare ca abscisa lui B, adică tocmai condițiile (1).

Din $\cos 2x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deducem

$$2x_1 = \pm 45°, \quad x_1 = \pm 22°30',$$

$$x_1 = \left(k \pm \frac{1}{8}\right)\pi.$$

Dacă $p = \sqrt{2}$, avem $\sqrt{2} > -6 + 3\sqrt{2}$, deci valoarea corespunzătoare pentru x_2 este reală și dată de

$$\cos 2x_2 = \frac{p\sqrt{2}}{2(p+3)} = \frac{2}{2(3+\sqrt{2})} = \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

$$\lg \cos 2x_2 = -\lg 4{,}414214 = -0{,}6450643 = \bar{1}{,}3549357$$

$2x_2 = 76°55'13''$ $\qquad$ $5\,432 \ldots 60''$

$x_2 = 38°27'36'',5$ $\qquad$ $1\,204 \ldots x$

$$x = \frac{1\,204 \times 60}{5\,432} = 13''$$

$$x_2 = k \times 180° \pm 38°27'36'',5.$$

V.5. *Să se rezolve un triunghi ABC, cunoscînd latura $BC = a$, unghiul A și știind că laturile verifică relația : $a = 2(b-c)$.*

Discuție. Aplicație : $a = 235$ m, $\sphericalangle A = 43°51'17''$.

Soluţie. Vom începe prin a determina unghiurile triunghiului. Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, ne permite să înlocuim relaţia dată între laturi, printr-o relaţie între unghiuri

$$\sin A = 2(\sin B - \sin C).$$

Această relaţia se mai scrie succesiv :

$$\sin A = 4 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2},$$

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 4 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2}.$$

Lăsînd cazul banal $\sin \frac{A}{2} = 0$, ne rămîne

$$\cos \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{B-C}{2}.$$

Unghiul A fiind dat, calculăm suma $B + C = 180° - A$, apoi diferenţa $B - C$ o determinăm din relaţia precedentă şi unghiurile B, C se află numai decît. Deoarece $\cos \frac{A}{2} \leqslant 1$, se vede că problema este totdeauna posibilă (se presupune bineînţeles că $b > c$). De aici încolo cădem peste unul din cazurile clasice de rezolvare ale triunghiurilor oarecare; laturile b, c se calculează cu formulele

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

iar aria cu formula

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Să luăm acum datele numerice ale problemei. Vom avea :

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} \cos 21°55'38'',5,$$

$$\lg \sin \frac{B-C}{2} = \bar{1},66636, \quad B - C = 55°16'10'',$$

$$B = 95°42'26'',5, \quad C = 40°26'16'',5.$$

$$\lg b = 2,52828, \quad \lg c = 2,34243, \quad \lg S = 4,41031$$

$$b = 337,5 \text{ m}, \quad c = 220 \text{ m}, \quad S = 25\,722,35 \text{ m}^2.$$

Observaţii. 1. Construcţia triunghiului se poate face astfel: se construieşte hiperbola care admite ca focare punctele B, C şi ca axă transversă $B'C'=2a'=b-c=\frac{a}{2}$, B', C' fiind mijloacele segmentelor MB, MC (M mijlocul lui BC). Celelalte elemente ale hiperbolei sînt: distanţa focală $2c'=BC=a$; axa netransversă $2b'=2\sqrt{c'^2-a'^2}=a\frac{\sqrt{3}}{2}$; unghiul α pe care o asimptotă îl face cu BC este dat de $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b'}{a'}=\sqrt{3}$, deci $\alpha=60^0$.

Considerînd segmentele de cerc capabile de unghiul dat A, construite pe BC drept coardă, acestea se vor intersecţa cu ramura de hiperbolă, pentru care $b>c$, în două puncte reale A_1, A_2 simetrice în raport cu BC. Triunghiurile A_1BC, A_2BC sînt soluţiile problemei. Ele sînt egale, fiind simetrice în raport cu BC, deci nu sînt distincte ca mărime. Avem astfel confirmarea calculului trigonometric.

2. Rezolvarea triunghiului ABC se poate face şi astfel:

Calculăm întîi laturile b, c cu ajutorul unei ecuaţii de gradul al doilea. Din relaţia dată, deducem

$$a^3=4(b^2+c^2-2bc),$$

$$a^2=4(a^2+2bc\cos A-2bc),$$

$$8bc(1-\cos A)=3a^2,\quad bc=\frac{3a^2}{16\sin^2\frac{A}{2}};$$

$$(b+c)^2=(b-c)^2+4bc=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{a^2}{4}\left(1+\frac{3}{\sin^2\frac{A}{2}}\right).$$

Deci lungimile b, c sînt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2-\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{3}{\sin^2\frac{A}{2}}}\times x+\frac{3a^2}{16\sin^2\frac{A}{2}}=0;$$

$$b=\frac{a}{4}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sin^2\frac{A}{2}}}+1\right),\quad c=\frac{a}{4}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sin^2\frac{A}{2}}}-1\right).$$

Se vede şi pe această cale că problema admite o singură soluţie. Mai departe unghiurile B, C se calculează printr-unul din procedeele clasice. Aria triunghiului este dată de formula

$$S=\frac{3a^2}{16}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

3. Triunghiurile ale căror laturi verifică relația $a' = 2(b - c)$ se bucură de proprietăți speciale interesante; iată cîteva:

$$\cos A + 4\cos(B - C) = 3, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 3\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$4\operatorname{tg}\frac{A}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$r_b = 3r_c = 2h_a, \quad \frac{1}{h_a} = 2\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

Cercul înscris (I) în triunghiul ABC este tangent laturii BC în punctul B', iar cercul extînscris (I_a) este tangent în C' laturii BC. Dacă notăm cu D' piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A, avem relațiile

$$D'B = 2c, \quad D'C = 2b, \quad AD'^2 = 3bc$$

deci puterea punctului D' în raport cu cercul ABC este $\frac{4}{3}\overline{AD'}^2$.

4. Hiperbola considerată mai sus, împreună cu celelalte două analoge, constituie un grup de hiperbole remarcabile atașate unui triunghi. Ar fi interesant de studiat proprietățile acestor trei hiperbole, folosindu-ne, de exemplu, de coordonatele baricentrice.

V.6 *Să se rezolve un triunghi oarecare ABC, cunoscînd latura $BC = a$, mediana m_a și înălțimea h_a care pleacă din vîrful A.*

Discuție. Aplicație: $a = 75$ m, $m_a = 71$ m, $h_a = 63$ m.

Soluție. Se calculează întîi unghiul $\alpha = \sphericalangle AMB$ din triunghiul dreptunghi ADM (D, M piciorul înălțimii h_a și mijlocul lui BC). Avem deci $\sin\alpha = \frac{h_a}{m_a}$; din această relație vom determina două unghiuri α și $180° - \alpha$, astfel ca $\alpha < 90°$. Reținem numai primul unghi, al doilea nefiind acceptabil; condiția de posibilitate a problemei este $h_a \leqslant m_a$. Dacă această condiție este verificată, atunci problema admite totdeauna o soluție unică. Mai departe, vom considera triunghiurile MAB, MAC în care cunoaștem cîte două laturi și unghiul cuprins între ele și avem astfel un caz clasic de rezolvare.

Să tratăm cazul particular din enunț; vom avea

$\lg\sin\alpha = \lg 63 - \lg 71 = \bar{1},948\,08$, $\alpha = 62°32'15''$ aproximativ.

Dacă notăm $\sphericalangle MAB = u$, în triunghiul MAB, avem

$$\operatorname{tg}\frac{B-u}{2} = \frac{m_a - \frac{a}{2}}{m_a + \frac{a}{2}} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B-u}{2} = \lg 33{,}5 - \lg 108{,}5 + \lg \operatorname{ctg} 31°16'7'',5 = \bar{1},70619,$$

$$B - u = 53°53'44'',6\,; \quad B + u = 117°27'45'',$$

$$B = 85°40'4'',8, \quad u = 31°47'0'',2\,;$$

$$\lg c = \lg m_a + \lg \sin\alpha - \lg \sin B = 1{,}80810, \quad c = 64{,}283 \text{ m}.$$

Dacă notăm $\sphericalangle MAC = v$, în triunghiul MAC, avem

$$\operatorname{tg}\frac{C-v}{2} = \frac{m_a - \frac{a}{2}}{m_a + \frac{a}{2}} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{C-v}{2} = \lg 33{,}5 - \lg 108{,}5 + \lg \operatorname{tg} 31°16'7'',5 = \bar{1},27299$$

$$C - v = 21°14'19'',2, \qquad C + v = \alpha = 62°32'15'',$$

$$C = 41°53'17'',1, \qquad v = 20°38'57'',7\,;$$

$$\lg b = \lg m_a + \lg \sin\alpha - \lg \sin C = 1{,}97477, \quad b = 94{,}356 \text{ m}.$$

Unghiul A al triunghiului ABC se poate calcula pe două căi: din egalitatea $\sphericalangle A = u + v = 52°25'57'',9$, sau din egalitatea $\sphericalangle A = 180° - (\sphericalangle B + \sphericalangle C) = 52°25'58'',1$.

Avem astfel o verificare de calcul; diferența de $0'',2$ provine din erorile acumulate prin neglijarea diferitelor zecimale.

Aria S a triunghiului se calculează din formula $S = \frac{ah_a}{2}$;

$$\lg S = 1{,}87506 + 1{,}79934 - 0{,}30103 = 3{,}37337$$

$$S = 2\,362{,}50 \text{ m}^2.$$

Observații. Să arătăm cum se poate construi triunghiul ABC cu datele problemei. Vom indica două căi diferite.

1. Construim întîi triunghiul dreptunghi AMD căruia îi cunoaștem ipotenuza m_a și o catetă h_a. O dată construit acest triunghi, măsurăm pe direcția catetei MD segmentele egale $MB = MC = \frac{a}{2}$ și obținem celelalte două vîrfuri

B, C ale triunghiului. Construcția este posibilă numai dacă $h_a \leq m_a$; cazul limită corespunzînd triunghiului dreptunghi. D n această construcție ne putem da se ma dacă triunghiul ABC este ascuțitunghi sau optuzunghi.

În adevăr pentru ca unul din unghiurile B, C să fie obtuz, trebuie ca unul din punctele B, C să cadă între M, D; aceasta cere ca

$$MB < MD, \quad \frac{a}{2} < \sqrt{m_a^2 - h_a^2};$$

aceasta este condiția ca unghiul B să fie obtuz. În cazul

$$\frac{a}{2} > \sqrt{m_a^2 - h_a^2},$$

unghiurile B, C sînt ascuțite; așa este cazul numeric tratat.

Să vedem cînd unghiul A este obtuz; dacă $A = 90°$, atunci triunghiul ABC fiind dreptunghi avem $a = 2m_a$. Deci pentru ca unghiul A să fie obtuz, trebuie ca $a > 2m_a$, iar pentru ca unghiul să fie ascuțit trebuie ca $a < 2m$.

2. Se ia un segment $BC = a$ și din punctul M mijlocul acestui segment drept centru se descrie un cerc cu raza m_a; paralelele duse la BC la distanțe egale cu lungimea h_a intersectează (dacă $h_a < m_a$) cercul în patru puncte A_1, A_2, A'_1, A'_2 astfel că patrulaterul $A_1A_2A'_2A'_1$ este un dreptunghi cu centrul M. Avem astfel patru triunghiuri A_1BC, A_2BC, A'_1BC, A'_2BC care constituie soluțiile problemei ele sînt distincte ca așezare, dar nu și ca mărime, căci sînt două cîte două simetrice fie în raport cu BC, fie în raport cu mediatoarea lui BC, fie în raport cu punctul M, astfel că avem o singură soluție ca mărime.

Lungimile b, c se pot calcula și pe cale geometrică, astfel:

$$AB^2 = c^2 = AD^2 + BD^2 = h_a^2 + (MB - MD)^2 =$$

$$= h_a^2 + \frac{a^2}{4} + \left(m_a^2 - h_a^2\right) - a\sqrt{m_a^2 - h_a^2},$$

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a\sqrt{m_a^2 - h_a^2}.$$

$$AB^2 = b^2 = AD^2 + CD^2 = h_a^2 + (MC + MD)^2 =$$

$$= h_a^2 + \frac{a^2}{4} + \left(m_a^2 - h_a^2\right) + a\sqrt{m_a^2 - h_a^2},$$

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a\sqrt{m_a^2 - h_a^2}.$$

(am presupus cazul $b > c$).

Din relațiile precedente deducem relația cunoscută

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

De asemenea deducem relația

$$b^2 - c^2 = 2a\sqrt{m_a^2 - h_a^2}.$$

Dacă presupunem că $a > b > c$ avem de asemenea relaţiile

$$a^2 - b^2 = 2c\sqrt{m_c^2 - h_c^2}, \quad a^2 - c^2 = 2b\sqrt{m_b^2 - h_b^2}.$$

De aici scoatem următoarele relaţii interesante

$$b\sqrt{m_a^2 - h_b^2} = c\sqrt{m_c^2 - h_c^2} + a\sqrt{m_a^2 - h_a^2},$$

$$b^3\sqrt{m_b^2 - h_b^2} = c^3\sqrt{m_c^2 - h_c^2} + a^3\sqrt{m_a^2 - h_a^2},$$

$$\frac{b\sqrt{m_b^2 - h_b^2}}{c + a} = \frac{c\sqrt{m_c^2 - h_c^2}}{a + b} + \frac{a\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{b + c}.$$

V.7. *Să se rezolve un triunghi oarecare, cunoscînd latura* $BC = a$ *şi înălţimile* h_b, h_c *care pleacă din* B, C *respectiv.*

Discuţie. Aplicaţie: $a = 127$ m, $h_b = 105$ m, $h_c = 97$ m.

Soluţie. Începem prin a calcula unghiurile triunghiului ABC; se deduc numai decît relaţiile:

$$\sin B = \frac{h_c}{a}, \qquad \sin C = \frac{h_b}{a}. \tag{1}$$

Din aceste relaţii deducem unghiurile B, C, după care calculăm pe A făcînd diferenţa la 180°. Laturile b, c le calculăm cu formulele

$$b = \frac{h_c}{\sin A}, \qquad c = \frac{h_b}{\sin A},$$

iar suprafaţa cu formula

$$S = \frac{h_b h_c}{2 \sin A}.$$

Pentru ca problema să admită soluţii, trebuie în primul rînd ca:

$$h_b \leqslant a, \quad h_c \leqslant a. \tag{2}$$

Dacă aceste condiţii sînt îndeplinite, atunci din prima egalitate (1) vom putea deduce un unghi $B < 90°$ şi un unghi $180° - C > 90°$; s-ar părea deci că problema admite patru soluţii, în realitate însă cazul cînd unghiurile triunghiului ar fi $180° - B$, $180° - C$ trebuie exclus şi rămîn trei soluţii. Să vedem dacă toate sînt acceptabile. Avem de deosebit două cazuri:

1. $h_b < h_c$, deci $C < B$;

din cele trei grupe de soluții probabile (B, C), $(B, 180°-C)$, $(180° - B, C)$ trebuie să excludem pe a doua, căci în acest caz

$$B + (180° - C) > 0$$

deci ne rămîn două soluții (B, C), $(180° - B, C)$.

2. $h_b < h_c$, deci $C > B$.

În acest caz trebuie eliminată soluția $(180° - B, C)$ și ne rămîn tot numai două soluții (B, C), $(B, 180° - C)$.

Așadar, dacă avem îndeplinite condițiile (2), atunci problema admite totdeauna două soluții distincte ca mărime.

Cazul $h_b = h_c$ conduce la o soluție unică (un triunghi isoscel).

Să considerăm acum cazul particular din problemă. Sîntem în cazul $h_b > h_c$, deci vom avea două soluții (B, C), $(B, 180° - C)$

$$\lg \sin B = \lg 97 - \lg 127 = \bar{1},88297, \quad B = 49°47'54'';$$
$$\lg \sin C = \lg 105 - \lg 127 = \bar{1},91739, \quad C = 55°46'7'',5.$$

Primul triunghi are deci următoarele unghiuri:

$$A = 74°25'58'',5; \quad B = 49°47'54'';$$
$$C = 55°46'7'',5,$$

iar al doilea triunghi:

$$A = 5°58'13'',5; \quad B = 49°47'54''; \quad C = 124°13'52'',5.$$

Laturile b, c și aria S a primului triunghi sînt date de

$$\lg b = \lg h_c - \lg \sin A = 2,00301; \qquad b = 100,69 \text{ m};$$
$$\lg c = \lg h_b - \lg \sin A = 2,03743; \qquad c = 109 \text{ m};$$
$$\lg S = \lg h_b + \lg h_c - \lg \sin A - \lg 2 = 3,72317;$$
$$S = 5\,286,50 \text{ m}^2.$$

Pentru al doilea triunghi, avem

$$\lg b = 2,96968; \quad b = 932,56 \text{ m};$$
$$\lg c = 3,00410; \quad c = 1\,009,5 \text{ m};$$
$$\lg S = 4,68984; \quad S = 48\,960 \text{ m}^2.$$

Observații. Dacă construim triunghiul ABC pentru care se cunosc elementele a, h_b, h_c, ajungem la aceleași concluzii cu privire la posibilitatea problemei. În adevăr, construim întîi un segment de dreaptă $BC = a$ și pe acest segment ca diametru construim un cerc; apoi din punctele B, C respectiv drept centre, cu lungimile h_b, h_c drept raze descriem cercuri. Pentru ca problema să admită soluții reale, trebuie ca aceste cercuri să intersecteze cercul de diametru

BC în puncte reale; avem deci tot două condiții de posibilitate a problemei, $h_b < a$, $h_c < a$, adică tocmai condițiile (2). Dacă aceste condiții sînt verificate, atunci cercul $B(h_b)$ intersectează cercul (BC) în două puncte E, E', simetrice în raport cu diametrul BC, iar cercul $C(h_c)$ intersectează același cerc (BC) în alte două puncte F, F' de asemenea simetrice în raport cu BC. Dreptele BF, CE se intersectează în punctul A, iar perechile de drepte (BF', CE), (BF', CE'), (BF, CE'), se intersectează respectiv în punctele A_1, A', A_1'. Triunghiurile ABC, A_1BC, $A'BC$, $A_1'BC$ sînt soluțiile problemei; ele sînt două cîte două simetrice în raport cu latura BC, deci, ca mărime, avem numai două soluții, așa cum am găsit și pe cale trigonometrică.

Să considerăm triunghiurile distincte ABC, A_1BC; vom da cîteva proprietăți ale acestor triunghiuri. Să notăm cu D piciorul înălțimii dusă din A pe latura BC, iar cu H ortocentrul triunghiului ABC; punctul H_1, intersecția dreptelor BE, CF' este, evident, ortocentrul triunghiului A_1BC, deci dreapta A_1H_1 este perpendiculară pe BC într-un punct D_1.

Punctele D, E, F' sînt coliniare.

În adevăr, avem $\sphericalangle BDF' = \sphericalangle BDF$, $\sphericalangle EDA = \sphericalangle FDA$, $\sphericalangle BDF' + \sphericalangle BDA + \sphericalangle EDA = 180°$.

Punctele E, F, D_1 sînt coliniare.

În adevăr, diagonalele patrulaterului $BECF'$ sînt BC, EF' A_1H_1; se știe că fiecare din ele este împărțită armonic de celelalte două (teorema lui *Pappus*); aplicînd aceasta diagonalei BC, deducem că punctele D, D_1 sînt conjugate armonic față cu B, C; aplicînd aceeași teoremă patrulaterului $AEHF'$, deducem că dreapta EF trece prin D_1.

Dreptele AH, A_1H_1 sînt respectiv polarele punctelor D_1D în raport cu cercul BC.

Să presupunem că $h_b < h_c$, deci $B > C$. Este ușor de văzut că în acest caz $\sphericalangle ED_1C = B - C$; tangenta în A la cercul ABC intersectează latura BC, în T, iar tangenta în A_1 la cercul A_1BC intersectează pe BC în T_1. Dreptele AT, EF fiind paralele avem $\sphericalangle ATD_1 = B - C$, deci $\sphericalangle ATD_1 = \sphericalangle BA_1C = B - C$ adică patrulaterul A_1ABT este inscriptibil; urmează că $\sphericalangle TA_1B = \sphericalangle TAB = C$, deci dreapta TA_1 este tangentă în A_1 la cercul A_1BC, $T_1 \equiv T$. Rezultă că avem:

Tangentele în A, A_1 la cercurile ABC, A_1BC se intersectează în același punct T pe BC astfel ca $TA = TA_1$.

Punctul A_1 este a doua intersecție a laturii AC cu cercul lui Appolonius corespunzător vîrfului A.

Bisectoarele unghiurilor A, A_1 se intersectează pe latura BC.

Dacă $h_c < h_b$ proprietățile precedente (unele din ele) suferă oarecare modificări: lăsăm pe seama cititorilor să facă acele modificări și să găsească și alte proprietăți noi ale configurației, proprietăți care sînt foarte numeroase și interesante.

V.8. 1. *În ce interval, expresia*

$$\sqrt{\sin x + \cos 2x}$$

are o valoare reală?

2. *Să se calculeze limita derivatei acestei expresii cînd* $x \to \frac{\pi}{2}$

Soluție. 1. Avem $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, deci

$$\sin x + \cos 2x = 1 + \sin x - 2\sin^2 x.$$

Acest trinom de gradul al doilea în raport cu $\sin x$, egale cu zero, ne dă o ecuaţie ale cărei rădăcini sînt

$$\sin x = 1 \text{ şi } \sin x = -\frac{1}{2}$$

şi trinomul este pozitiv pentru valorile lui $\sin x$ cuprinse între rădăcini, adică

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1,$$

sau luînd pentru x cele mai mici arce în valoare absolută,

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6},$$

sau în general

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

Aceasta este condiţia ca expresia dată să fie reală.

2. Derivata expresiei date este

$$E = \frac{\cos x - 2\sin 2x}{2\sqrt{\sin x + \cos 2x}}$$

care pentru $x \to \frac{\pi}{2}$ se prezintă sub forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Însă am văzut că

$$\sin x + \cos 2x = 1 + \sin x - 2\sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + 2\sin x),$$

iar

$$1 - \sin x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

La fel

$$\cos x - 2\sin 2x = \cos x(1 - 4\sin x),$$

iar

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\frac{1 - 4\sin x}{\sqrt{2 + 4\sin x}}$$

care pentru $x \to \frac{\pi}{2}$, tinde către

$$E \to 1\,\frac{1-4}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

V.9. *Dacă x este necunoscut, iar p un parametru, să se rezolve ecuaţia trigonometrică*

$$2(p+1)\cos 2x + 4p \sin x - 3p - 1 = 0,$$

adică:

1. *Să se deducă ecuaţia de gradul al doilea în raport cu $\sin x$ şi să se calculeze cele două valori ale lui $\sin x$.*

2. *Să se determine valorile parametrului p pentru care valorile corespunzătoare ale lui x sînt reale.*

3. *Să se calculeze în grade, minute şi secunde, valorile lui x în cazul particular $p = -\frac{1}{7}$.*

Soluţie. 1. Avem $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, iar $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ deci $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, şi ecuaţia dată devine

$$4(p+1)\sin^2 x - 4p \sin x + p - 1 = 0,$$

adică o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu $\sin x$, ale cărei rădăcini sînt $\frac{2p \pm 2}{4(p+1)}$, adică:

$$\sin x_1 = \frac{1}{2}; \quad \sin x_2 = \frac{p-1}{2(p+1)}.$$

2. Funcţia $\sin x$ variază între -1 şi $+1$, deci valorile x_1 şi x_2 sînt reale dacă sinusurile lor sînt cuprinse între aceste limite; x_1 este real pentru că $-1 < \frac{1}{2} < 1$, iar x_2 este real dacă

$$-1 \leqslant \frac{p-1}{2(p+1)} \leqslant 1 \text{ sau } -2 \leqslant \frac{p^2-1}{(p+1)^2} \leqslant +2,$$

sau înmulţind cu numărul pozitiv $(p+1)^2$,

$$-2(p+1)^2 \leqslant p^2 - 1 \leqslant 2(p+1)^2.$$

Parametrul p trebuie să satisfacă inegalităţile simultane

$$-2(p+1)^2 \leqslant p^2 - 1 \quad \text{şi} \quad p^2 - 1 \leqslant 2(p+1)^2,$$

adică

$$3p^2 + 4p + 1 \geqslant 0 \quad \text{şi} \quad p^2 + 4p + 3 \geqslant 0.$$

Primul trinom se anulează pentru p egal cu -1 sau $-\frac{1}{3}$; al doilea trinom pentru p egal cu -3 sau -1. Prima inegalitate este satisfăcută pentru $p \leqslant -1$ sau $p \geqslant -\frac{1}{3}$; a doua

inegalitate pentru $p \leqslant -3$ sau $p \geqslant -1$. Rezultă că ambele inegalități sînt satisfăcute simultan pentru

$$p \leqslant -3 \quad \text{sau} \quad p \geqslant -\frac{1}{3}.$$

Observație. Dacă punem $q = \frac{p-1}{p+1}$, deducem că x_2 este real dacă $-2 \leqslant q \leqslant 2$. Însă ecuația de legătură dintre p și q se mai scrie

$$pq - p + p + 1 = 0$$

și reprezintă, în raport cu două axe rectangulare Op, Oq, o hiperbolă echilateră cu centrul în punctul $(-1,1)$ și cu asimptotele paralele cu axele de coordonate. Curba trece prin punctele $(0,-1)$ și $(1,0)$ și se construiește ușor; dreapta $q=2$ taie curba în punctul $A(-3,2)$, iar dreapta $q=-2$, în punctul $B\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$.

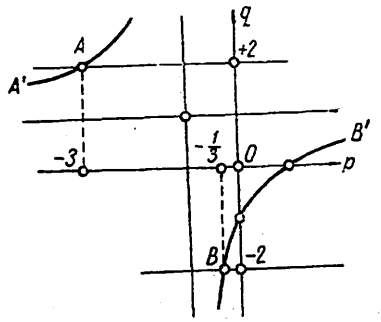


Fig. 49

Se vede pe figură (fig. 49) că dacă ordonata q satisface condiția $-2 \leqslant p \leqslant 2$, punctul curent $M(p, q)$, de pe hiperbolă trebuie să se găsească pe arcul AA' sau pe BB', adică abscisa p a punctului M trebuie să fie

$$p \leqslant -3 \quad \text{sau} \quad p \geqslant -\frac{1}{3}.$$

3. $\sin x_1 = \frac{1}{2}$ deducem $x_1 = 30°$ sau $x_1 = 150°$ și în general

$$x_1 = \left(\frac{1}{6} + 2k\right)\pi \text{ sau } x_1 = \left(2k + 1 - \frac{1}{6}\right)\pi.$$

Dacă $p = -\frac{1}{7}$, avem $\frac{p-1}{2(p+1)} = -\frac{2}{3}$, $\sin x_2 = -\frac{2}{3}$ sau punînd $x_2 = -y$, avem $\sin y = +\frac{2}{3}$.

$\lg \sin y = \lg 2 - \lg 3 = 0{,}30103 - 0{,}47712 = 0{,}30103 + \bar{1}{,}52288$
$\lg \sin y = \bar{1}{,}82391$ 14 60″
$\lg \sin 41°48' = \bar{1}{,}82382$ 9×
$\lg \sin 41°49' = \bar{1}{,}82396$ $x = \frac{9 \times 60}{14} = \frac{270}{7} = 38''$

$y = 41°48'38''$, $x_2 = -41°48'38''$.

Acesta este cel mai mic arc, în valoare absolută, al cărui sinus este egal cu $-\frac{2}{3}$.

V.10. *Un balon sferic de rază* $r = 5$ m, *este văzut de un observator aşezat pe un plan orizontal sub un unghi* $a = 1°28'$, *iar unghiul făcut de raza vizuală ce merge la centrul balonului cu planul orizontal este determinat de acelaşi observator ca fiind* $\beta = 78°43'$. *Se întreabă:*

1. *La ce înălţime* h *se găseşte balonul?*

2. *Presupunînd că balonul se înalţă pe verticală cu* 100 m *faţă de poziţia precedentă, sub ce unghi va fi văzut de acelaşi observator, în această nouă poziţie?*

Soluţie. 1. Fie B centrul balonului, A poziţia observatorului, C piciorul perpendicularei BC pe planul orizontal AC; în triunghiul dreptunghi ACB avem $\beta = \sphericalangle BAC$. Planul ABC taie suprafaţa sferică a balonului după un cerc, fie AT o tangentă din A la acest cerc; triunghiul ATB este dreptunghi în T (punctul de tangenţă) şi $\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle BAT$.

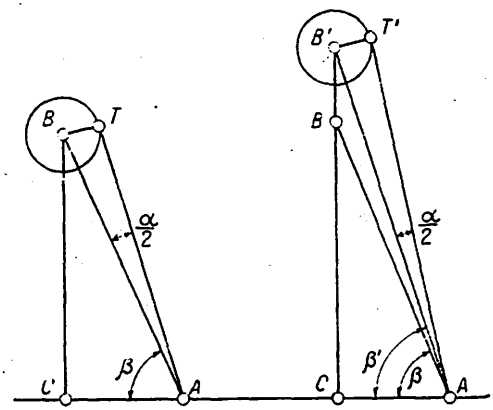


Fig. 50

În triunghiul dreptunghi ACB avem $CB = AB \sin \beta$, iar în triunghiul dreptunghi ATB avem $BT = AB \sin \frac{\alpha}{2}$, sau făcînd înlocuirile: $BT = 5$, $\frac{\alpha}{2} = 44'$, $\beta = 78°43'$,

$$h = CB = \frac{5 \sin 78°43'}{\sin 44'}.$$

$$\lg h = \lg 5 + \lg \sin 78°43' - \lg \sin 44' =$$

$$= 0{,}69897 + \bar{1}{,}99152 - \bar{2}{,}10717 =$$

$$= 0{,}69897 - 1 + 0{,}99152 + 2 - 0{,}10717 = 2{,}58332.$$

Înălţimea h la care se găseşte centrul balonului este

$$h = 383,\ 108 \text{ m}.$$

2. Dacă balonul se găseşte la înălţimea $h' = h + 100 = 483{,}108$ m, avem $CB' = h'$, unde B' este centrul balonului; în triunghiul dreptunghi ACB' (fig. 50) însemnăm $\beta' = \sphericalangle B'AC$.

Planul $AB'C$ taie suprafața sferică a balonului după un cerc, fie AT' o tangentă dusă din A la acest cerc; triunghiul $AT'B'$ este dreptunghi în T' (punctul de tangență) și unghiul căutat α', sub care este văzut balonul în noua lui poziție, este dat de $\frac{\alpha'}{2} = B'AT'$.

În triunghiul dreptunghi ACB' avem $CB' = AB' \sin \beta'$, iar în triunghiul dreptunghi $AT'B'$ avem $B'T' = AB' \sin \frac{\alpha'}{2}$, sau făcînd înlocuirile, $B'T' = 5$, $CB' = 483{,}108$,

$$\sin \frac{\alpha'}{2} = \frac{5 \sin \beta'}{483{,}108}.$$

Să calculăm mai întîi pe β'; în triunghiul dreptunghi $AB'C$, avem $CB' = CA \times \operatorname{tg} \beta'$, iar în triunghiul dreptunghi ACB, avem, $CB = CA \cdot \operatorname{tg} \beta$, de unde scoatem

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{CB' \cdot \operatorname{tg} \beta}{CB},$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{483{,}108 \times \operatorname{tg} 78°43'}{383{,}108},$$

$$\lg \operatorname{tg} \beta' = \lg 483{,}108 - \lg 383{,}108 + \lg \operatorname{tg} 78°43' =$$
$$= 2{,}68405 - 2{,}58332 + 0{,}70002 = 0{,}80075.$$
$$\beta' = 81°0'34''.$$

Valoarea lui α' este dată de

$$\lg \sin \frac{\alpha'}{2} = \lg 5 + \lg \sin \beta' - \lg 483{,}108 = 0{,}69897 +$$

$$+ \bar{1}{,}99463 - 2{,}68405 = 0{,}69360 - 2{,}68405 = \bar{2}{,}00955.$$

Tabelele arată că unghiul $x = \frac{\alpha'}{2}$ este cuprins între 0°35' și 0°36' și dă pentru valoarea corespunzătoare a lui $S = 6{,}68556{,}7$

$$\text{logaritmul dat} = \bar{2}{,}00955$$
$$S = \bar{6}{,}68556{,}7$$
$$\text{diferența } \lg x'' = 3{,}32398$$
$$\text{Tabela numerică dă } x = 2108'',5.$$
$$\text{Dar } 35' = 2\,100'', \text{ deci } x = 35'8'',5,$$
$$\alpha' = 2x = 1°10'17''.$$

V.11. *Să se rezolve triunghiul ABC în care se dau a, A şi relaţia $a = \frac{b+c}{2}$. Discuţie.*

Aplicaţie: $a = 500$ m, $A = 53°37'42''$.

Soluţie. Din relaţiile fundamentale $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ se deduce, prin aplicarea proprietăţilor rapoartelor egale,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$$

şi dacă ţinem seama de relaţia de condiţie $a = \frac{b+c}{2}$, deducem

$$2 \sin A = \sin B + \sin C. \tag{1}$$

Avem apoi relaţiile $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}.$$

Cu aceasta, relaţia (1) devine

$$2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2}. \tag{2}$$

(Am simplificat cu factorul $\cos \frac{A}{2}$, care este diferit de zero, căci altfel ar trebui ca $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2}$, $A = \pi$, triunghiul s-ar reduce la o dreaptă).

Unghiul A fiind dat, vom putea deduce din relaţia (2) diferenţa $B - C$, iar din relaţia $A + B + C = \pi$, vom deduce suma $B + C$.

Avînd cunoscute pe $B + C$ şi $B - C$, vom deduce valorile lui B, C. Laturile b, c se deduc din relaţiile $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, iar aria S se deduce din relaţia $S = \frac{1}{2} bc \sin A$.

Discuţie. Avem, evident, inegalităţile

$$B - C < \pi, \quad \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \cos \frac{B-C}{2} \leqslant 1.$$

Relaţia (2) ne dă $0 < \sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, de unde reiese $\sin \frac{A}{2} \leqslant \sin \frac{\pi}{6}$

$$A \leqslant \frac{\pi}{3}. \tag{3}$$

Ultima inegalitate este condiția de posibilitate a problemei.

Să regăsim această condiție pe o cale geometrică. Fiind dată latura $BC = a$ și unghiul opus A, locul geometric al vîrfului A este segmentul de cerc ce trece prin B, C, și este capabil de $\sphericalangle A$ (fig. 51).

Relația de condiție $b + c = 2a$ ne spune că suma distanțelor vîrfului A la punctele fixe B, C este constantă și egală cu $2a$. Vîrful A se găsește deci pe elipsa care admite punctele B, C ca focare și a cărei axă mare VV' este egală cu $2a$.

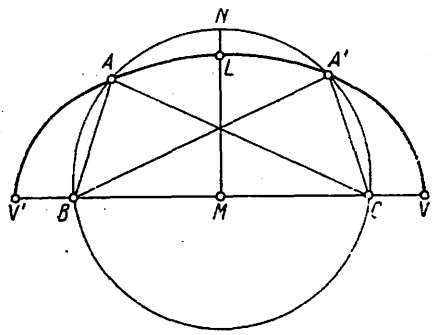


Fig. 51

Segmentul de cerc pe care se mișcă punctul A intersectează această elipsă în două puncte A, A' care pot fi reale și distincte sau confundate, sau imaginare. Construcția triunghiului este deci făcută, avem două triunghiuri ABC, $A'BC$, care se pot construi cu datele problemei. Cele două triunghiuri sînt simetrice în raport cu mediatoarea segmentului BC. Pentru ca punctele A, A' să fie reale, trebuie ca semiaxa mică a elipsei, adică LM, să fie mai mică sau cel mult egală cu MN (N este punctul unde mediatoarea segmentului BC taie segmentul de cerc loc geometric al vîrfului A). Deci condiția de realitate a punctelor A și A' este

$$LM \leqslant MN. \tag{4}$$

Dacă notăm cu $2a'$, $2b'$, $2c'$ elementele elipsei, adică axa mare, axa mică și distanța focală, se știe de la proprietățile elipsei că avem relația $a'^2 = b'^2 + c'^2$. În cazul nostru, avem $a' = a$, $c' = \frac{a}{2}$. Deducem, $b' = LM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se vede apoi că avem $MN = MC \times \operatorname{ctg} MNC$, sau $MN = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. Condiția (4) devine

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \geqslant \sqrt{3}. \tag{5}$$

Se știe însă că $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$, deci (5) devine $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$, și deoarece cotangenta variază în mod invers cu

arcul, deducem $\frac{A}{2} \leqslant \frac{\pi}{6}$; $A \leqslant \frac{\pi}{3}$. Am regăsit astfel condiția (3).

Inegalitatea corespunde la cazul a două puncte distincte A, A', iar egalitatea la cazul cînd aceste două puncte se confundă.

Triunghiul din problema de mai sus este un triunghi cu laturile în progresie aritmetică, latura mijlocie fiind a, iar cea mai mare putînd fi ori b ori c.

Mai trebuie făcută observația că în cazul limită $A = \frac{\pi}{3}$, triunghiul devine echilateral.

Aplicație: $a = 500$ m, $\sphericalangle A = 53°37'42''$.

$$\lg \cos \frac{B-C}{2} = \lg 2 + \lg \sin \frac{A}{2},$$

$$\lg \cos \frac{B-C}{2} = \lg 2 + \lg \sin 26°48'51'',$$

$$\lg \cos \frac{B-C}{2} = 0{,}30103 + \bar{1}{,}65427 = \bar{1}{,}95530,$$

$$\frac{B-C}{2} = 25°33'10'', \quad B - C = 51°6'20''$$

$$B + C = 180° - 53°37'42'' = 126°22'18'',$$

$$\sphericalangle B = 88°44'19'', \quad \sphericalangle C = 37°37'59''.$$

$$\lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A,$$

$$\lg b = \lg 500 + \lg \sin 88°44'19'' - \lg \sin 53°\ 37'42'',$$

$$\lg b = 2{,}69897 + \bar{1}{,}99989 - \bar{1}{,}90589,$$

$$\lg b = 2{,}69897 + \bar{1}{,}99989 + 0{,}09411 = 2{,}79297,$$

$$b = 620{,}83 \text{ m}.$$

$$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A,$$

$$\lg c = \lg 500 + \lg \sin 37°37'59'' - \lg \sin 53°37'42'',$$

$$\lg c = 2{,}69897 + \bar{1}{,}78576 - \bar{1}{,}90589,$$

$$\lg c = 2{,}69897 + \bar{1}{,}78576 + 0{,}09411 = 2{,}57884,$$

$$c = 379{,}18 \text{ m}.$$

Calculînd suma $b + c$, avem $b + c = 1\,000{,}01$ m.

Eroarea de 1 cm s-ar putea micşora întrebuinţînd tablele de logaritmi cu mai mult de 5 zecimale.

$$\lg S = \lg b + \lg c + \lg \sin A - \lg 2,$$
$$\lg S = 2{,}79297 + 2{,}57884 + \bar{1}{,}90589 - 0{,}30103,$$
$$\lg S = 2{,}79297 + 2{,}57884 + \bar{1}{,}90589 + \bar{1}{,}69897,$$
$$\lg S = 4{,}976\,67,$$
$$S = 94\,332 \text{ m}^2.$$

V.12. *Să se rezolve un triunghi, cunoscînd aria, perimetrul şi un unghi.*

Se va determina întîi raza cercului exînscris, opus unghiului dat, apoi latura opusă unghiului dat. Condiţiile de posibilitate ale problemei.

Soluţie. Fie S, $2p$, A aria, perimetrul şi unghiul, care sînt date. Însemnînd cu D, E, F punctele de contact ale cercului exînscris, opus unghiului A, cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului, cu I_a şi r_a centrul şi raza acestui cerc, avem

$$AE = AF;\ AE + AF = AC + CE + AB + BF =$$
$$= AC + AB + CD + DB = AC + AB + BC = 2p,$$

deci

$$AE = AF = p.$$

În triunghiul dreptunghi AEI_a, avem $I_aE = AE \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, sau

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Folosind acum formula cunoscută $r_a = \frac{S}{p-a}$, avem

$$\frac{S}{p-a} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$a = p - \frac{S}{p} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}. \qquad (1)$$

Latura a se calculează cu această formulă care nu este calculabilă cu logaritmi. Pentru a putea folosi logaritmii, se calculează întîi $p - a$ prin formula calculabilă cu logaritmi $p - a = \frac{S}{p} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ apoi printr-o simplă scădere $a = p - (p - a)$ se obţine a.

Pentru a calcula apoi unghiurile B, C se pleacă de la formulele fundamentale $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, din care se deduce succesiv:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C},$$

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{2p-a}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}},$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \left(\frac{2p}{a} - 1\right)\sin\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Înlocuind pe a cu valoarea aflată mai sus, vom putea calcula prin logaritmi, diferența $B - C$. Suma $B + C = 180° - A$ fiind cunoscută, vom putea determina unghiurile B, C.

O dată cunoscute B, C, vom putea calcula, cu formulele fundamentale scrise mai sus, laturile b, c.

Discuție. a fiind una din laturile triunghiului, va trebui ca $0 < a < p$. Aplicînd formula (1), avem $0 < p - \frac{S}{p}\cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2} < p$, inegalitate care se descompune în următoarele

$$\frac{S}{p}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} > 0, \quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2} < \frac{p^2}{S}. \qquad (3)$$

Prima inegalitate este verificată, căci $S > 0$, $p > 0$, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} > 0$ căci $\sphericalangle A < 180°$, $\sphericalangle\frac{A}{2} < 90°$, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} > 0$.

Rămîne deci, deocamdată ca relație de condiție, inegalitatea (3).

În ecuația (2), membrul întîi fiind un cosinus este mai mic sau cel mult egal cu 1, deci și membrul al doilea $\leqslant 1$, de unde deducem

$$(2p - a)\sin\frac{A}{2} \leqslant a$$

și înlocuind pe a cu valoarea (1), găsim

$$\left(p + \frac{S}{p}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2} \leqslant p - \frac{S}{p}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{p^2}{S}\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{p^2}{S}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) \qquad (4)$$

relație care completează relația (3). În adevăr, deoarece $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)<1$, (3) este o consecință a lui (4), dar nu și invers.

Să dăm o soluție geometrică. Dîndu-se unghiul A, vom măsura pe laturile lui segmentele $AE = AF = p$ (p este dat). Construim cercul I_a tangent laturilor unghiurilor în punctele E și F. Rămîne să găsim vîrfurile B, C ale triunghiului. Va trebui să ducem cercului I_a o tangentă BC (în spre vîrful A al unghiului) astfel ca aria triunghiului ABC să fie egală cu S, care este dată. Se știe că înfășurătoarea dreptelor BC pentru care aria triunghiului ABC este constantă, este o hiperbolă (H) avînd ca asimptote laturile unghiului. În adevăr, să luăm ca axe de coordonate x și y chiar laturile AB, AC ale triunghiului.

Ecuația laturei BC este de forma $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ sau $\beta x + \alpha y = \alpha\beta$.

Adăugăm și condiția $\alpha\beta \sin A = 2S$, care spune că aria $ABC = S$.

Avem de căutat deci înfășurătoarea acestei drepte, parametrii α, β fiind legați prin a doua relație. Eliminînd parametrul β, ecuația dreptei se mai scrie

$$\alpha^2 y \sin A - 2\alpha S + 2S x = 0.$$

Înfășurătoarea acestei drepte se găsește scriind că discriminantul acestei ecuații, în raport cu parametrul α, este nul.

Se găsește imediat că ecuația înfășurătoarei este $xy = \frac{S}{2}\sin A$, care reprezintă o hiperbolă (H) asimptotă laturilor unghiului.

Cercul I_a și hiperbola (H) au patru tangente comune, dintre care două sînt laturile unghiului A; celelalte două tangente BC, $B'C'$ sînt simetrice față de bisectoarea AI_a, deci ele ne dau triunghiuri ABC, $AB'C'$ care răspund la problemă.

Cele două triunghiuri sînt însă simetric egale, deci nu reprezintă două soluții deosebite.

Dacă cercul și hiperbola nu admit tangente comune (este vorba de ramura hiperbolei cuprinsă în unghiul A) în afară de laturile unghiului, nu avem nici un triunghi care să răspundă la problema noastră; dacă cercul și hiperbola sînt tangente, avem un singur triunghi ABC care este isoscel.

Să regăsim pe calea aceasta condiția (4).

Fie V punctul în care dreapta AI_a taie ramura de hiperbolă, iar U punctul în care aceeaşi dreaptă taie arcul $\overset{\frown}{EF}$ al cercului I_a, dinspre vîrful A. Condiţia de posibilitate a problemei este

$$AV \leqslant AU.$$

Rezolvînd sistemul $y = x$, $xy = \frac{S}{2 \sin A}$, găsim coordonatele punctului V, $x = y = \sqrt{\frac{S}{2 \sin A}}$.

Deci $AV^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos A = \frac{S}{\sin A} + \frac{S \cos A}{\sin A}$,

$$AV = \sqrt{S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}$$

$$AU = AI_a - r_a = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}} - r_a = p \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right).$$

Condiţia de posibilitate $AV \leqslant AU$ devine prin ridicare la pătrat tocmai condiţia (4). Egalitatea $AV = AU$ corespunde cazului cînd cercul şi hiperbola sînt tangente.

V.13. *Să se calculeze distanţa c între două puncte A şi B, cunoscînd distanţele punctelor A şi B la un punct C şi unghiul ACB; să se calculeze de asemenea distanţa lui C la direcţia AB.*

Aplicaţie. $CB = a = 245{,}36$ m; $CA = b = 172{,}28$ m;

$$\sphericalangle ACB = 108°36'30''.$$

Soluţie. Folosim formula

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2},$$

în care se cunosc a, b, c, deci vom putea calcula $A - B$. Cunoscînd C, vom avea $A + B = 180° - C$; avînd diferenţa $A - B$ şi suma $A + B$, deducem valorile unghiurilor A şi B. Pe c îl vom calcula cu formula $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Distanţa lui C la direcţia AB se calculează cu formula

$$d = b \sin A.$$

Aplicație : $CB = a = 245{,}36$ m ; $CA = b = 172{,}28$ m :

$$\sphericalangle ACB = 108°36'30''.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{73{,}08}{417{,}64}\operatorname{ctg}\ 54°18'15'',$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \lg 7\,308 - \lg 41\,764 + \lg \operatorname{ctg}\ 54°18'15''$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = 3{,}86380 - 4{,}62080 + \bar{1}{,}85640$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1}{,}099\,40, \quad \sphericalangle A - \sphericalangle B = 14°19'46''.$$

$$\sphericalangle A = 42°51'38''; \quad \sphericalangle B = 28°31'61''.$$

$$\lg c = \lg 245{,}36 + \lg \sin 108°36'36'' - \lg \sin 42°51'38''.$$

$\lg c = 2{,}38980 + \bar{1}{,}97668 - \bar{1}{,}38265 = 2{,}53383$, $c = 341{,}85$ m.

Avem $\lg d = \lg b + \lg \sin A$.

$$\lg d = 2{,}23624 + \bar{1}{,}97668 = 2{,}21292, \quad d = 163{,}27 \text{ m}.$$

V.14. *Cineva privește nacela unui balon captiv și constată că raza vizuală face cu planul orizontal un unghi de* 30°. *Mergînd pe cîmpia orizontală* 879 m *drept spre balon privește nacela balonului sub un unghi de* 45° ; *pentru verificare, mai merge* 507 m *drept spre balon și privește nacela sub un unghi de* 60°.

Să se calculeze înălțimea nacelei deasupra orizontului folosind observațiile făcute în prima și ultima poziție și să se controleze rezultatul găsit, folosind și observația din poziția a doua.

Soluție. Fie N poziția în spațiu a nacelei, fie O proiecția punctului N pe planul orizontal, A poziția inițială a observatorului, B poziția intermediară și C poziția finală ; prin ipoteză, punctele A, B, C, O sînt în linie dreaptă, iar triunghiul dreptunghi AON este într-un plan vertical.

Din datele problemei $AB = a = 879$ m, $BC = b = 507$ m ;

$\sphericalangle OAN = u = 30°$, $\sphericalangle OBN = v = 45°$, $\sphericalangle OCN = w = 60°$.

Însemnăm $OC = c$ și $ON = H$, necunoscuta problemei este H.

Din triunghiurile dreptunghice AON, BON, CON deducem

$$ON = OA \operatorname{tg} u,\ ON = OB \operatorname{tg} v,\ ON = OC \operatorname{tg} w$$

sau

$$H = (a + b + c) \operatorname{tg} u,\ H = (b + c) \operatorname{tg} v,\ H = c \operatorname{tg} w.$$

Prin eliminarea lui c între două din aceste trei ecuații deducem

$$H = \frac{a \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{ctg} v}, \tag{1}$$

$$H = \frac{b \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} v \operatorname{ctg} w}. \tag{2}$$

$$H = \frac{(a+b) \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{ctg} w}. \tag{3}$$

Formula (1) dă înălțimea H în funcție de observațiile din pozițiile (A) și (B); formula (2) folosește observațiile din pozițiile (B) și (C), iar formula (3) pe cele din (A) și (C).

Făcînd înlocuirile, $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} 45° = 1$; $\operatorname{ctg} v = \operatorname{ctg} 45° = 1$; $\operatorname{ctg} w = \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, obținem

$$H = \frac{879}{\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{879}{\sqrt{3} - 1} = 439{,}5 \times (\sqrt{3} + 1), \tag{1}$$

$$H = \frac{507}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{507\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 253{,}5 \times (3 + \sqrt{3}), \tag{2}$$

$$H = \frac{1\,386}{\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 693\sqrt{3}. \tag{3}$$

Luînd $\sqrt{3} = 1{,}732$, găsim pentru H respectiv valorile

1 200,714 m; 1 199,562 m și 1 200,276 m

care sînt foarte apropiate. Dacă luăm ca valoare probabilă media aritmetică a acestor trei valori, găsim $H = 1\,200{,}184$ m sau cu aproximație de un metru prin lipsă, $H = 1\,200$ m.

V.15. *Se dă ecuația trigonometrică*

$$(p - 2) \cos 2x + 2 (p^2 - 3) \sin x - 3p - 2 = 0,$$

în care x este necunoscuta, iar p un parametru.

1. *Să se verifice că dacă* $p = -\frac{3}{2}$, *ecuația are rădăcinile reale; să se calculeze valorile lui* x *în acest caz particular.*

2. *Să se studieze realitatea rădăcinilor ecuației pentru diferitele valori ale parametrului* p.

Soluție. 1. Înlocuim cos $2x$ prin $1 - 2\sin^2 x$ și ecuația devine

$$(p-2)\sin^2 x - (p^2-3)\sin x + p + 2 = 0,$$

care este o ecuație de gradul al doilea în raport cu sin x și ale cărei rădăcini sînt

$$\sin x_1 = p + 2, \quad \sin x_2 = \frac{1}{p-2}.$$

În cazul particular $p = -\frac{3}{2}$, rădăcinile se reduc la $\sin x_1 = \frac{1}{2}$, $\sin x_2 = -\frac{2}{7}$.

Valorile x_1 și x_2 sînt reale pentru că și $\frac{1}{2}$ și $-\frac{2}{7}$ sînt numere cuprinse între -1 și $+1$.

Din ecuația $\sin x_1 = \frac{1}{2}$ deducem

$x_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$ radiani sau $x_1 = 150^0 = \frac{5\pi}{6}$ radiani și în general, $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ sau $x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Din ecuația $\sin x_2 = -\frac{2}{7}$ deducem, dacă punem $x_2 = -y$, $\sin y = \frac{2}{7}$,

$$\lg \sin y = 0{,}30103 - 0{,}84510 = -0{,}54407 = \bar{1}{,}45593,$$

$y = 16°36'6''$, $x_2 = -16°36'6''$ sau $x_2 = -163°23'54''$

și în general,

$x_2 = -16°36'6'' + k \times 360°$ sau $x_2 = -163°28'54'' + k \times 360°$.

2. Rădăcinile x_1 și x_2 sînt reale pentru valorile lui p care satisfac inecuațiile $\sin^2 x_1 \leqslant 1$ și $\sin^2 x_2 \leqslant 1$, adică

$$(p+2)^2 \leqslant 1, \quad \frac{1}{(p-2)^2} \leqslant 1$$

sau

$$(p+2+1)(p+2-1) \leqslant 0, (p-2+1)(p-2-1) \geqslant 0$$

sau

$$(p+3)(p+1) \leqslant 0, \ (p-1)(p-3) \geqslant 0.$$

Primul trinom $(p+3)(p+1)$ se anulează pentru $p=-3$ şi $p=-1$; este negativ sau cel mult egal cu zero pentru valorile lui p cuprinse între rădăcini, adică

$$-3 \leqslant p \leqslant -1.$$

Aceasta este condiţia ca rădăcina x_1 să fie reală.

Al doilea trinom $(p-1)(p-3)$ se anulează pentru $p=1$ şi $p=3$; este pozitiv sau cel puţin egal cu zero pentru valorile lui p exterioare intervalului determinat de rădăcini, adică

$$p \leqslant 1 \text{ sau } 3 \leqslant p.$$

Aceasta este condiţia ca rădăcina x_2 să fie reală.

Dacă parametrul p ia toate valorile de la $-\infty$ la $+\infty$, putem forma următorul tabel recapitulativ:

$-\infty < p < -3$, x_1 imaginar, x_2 real;
$-3 \leqslant p \leqslant -1$, x_1 şi x_2 reali;
$-1 < p \leqslant +1$, x_1 imaginar, x_2 real;
$-1 < p < +3$, x_1 şi x_2 imaginari;
$+3 \leqslant p < +\infty$, x_1 imaginar, x_2 real.

V.16. *Cineva merge cu bicicleta de la Predeal la Sibiu şi cînd trece prin satul Mîndra, Soarele îi proiectează umbra înainte, pe direcţia de mers. Are pe bicicletă,* 1,820 m *înălţime şi cînd merge pe drumul orizontal, umbra măsoară* 3,152 m; *cînd urcă o rampă, umbra măsoară* 2,228 m, *iar cînd coboară o pantă, umbra măsoară* 6,088 m.

Să se calculeze înclinările pe orizont ale rampei şi pantei.

Soluţie. Presupunem că drumul este orizontal: fie AB poziţia verticală şi AC umbra orizontală. Triunghiul BAC este dreptunghi în A şi catetele lui sînt

$AB = h = 1{,}820$ m, $AC = l = 3{,}152$ m.

Însemnăm cu u unghiul ACB şi deducem

$$h = l \operatorname{tg} u, \ \operatorname{tg} u = \frac{h}{l} = \frac{1{,}820}{3{,}152},$$

$$\lg \operatorname{tg} u = 0{,}26007 - 0{,}49859 = -0{,}23852 = \bar{1}{,}76148,$$

$$u = \sphericalangle ACB = 30°, \quad \sphericalangle ABC = 60°, \quad \sphericalangle BAC = 90°.$$

Presupunem că urcă rampa AC', care face cu orizontul AC unghiul necunoscut α; fie AB poziția verticală și AC' umbra pe rampă. În triunghiul BAC' avem

$$AB = h = 1{,}820 \text{ m}, \quad AC' = l = 2{,}228 \text{ m}, \quad \sphericalangle ABC' = 60°,$$
$$\sphericalangle C'AB = 90° - \alpha.$$

Fie $u' = \sphericalangle AC'B$; din triunghiul BAC' deducem

$$\frac{h}{\sin u'} = \frac{l'}{\sin 60°},$$

$$\sin u' = \frac{h}{l'} \sin 60° = \frac{1{,}820}{2{,}228} \sin 60°,$$

$$\lg \sin u' = 0{,}26007 + \bar{1}{,}93763 - 0{,}84792 = \bar{1}{,}84968,$$
$$u' = \sphericalangle AC'B = 45°, \quad \sphericalangle C'AB = 90° - \alpha = 75°, \alpha = 15°.$$

Presupunem că coborîm panta AC'', care face cu orizontul AC unghiul necunoscut β; fie AB poziția verticală și AC'' umbra pe pantă. În triunghiul BAC'' avem

$$AB = h = 1{,}820 \text{ m}, AC'' = l'' = 6{,}088 \text{ m}, \sphericalangle ABC'' = 60°,$$
$$\sphericalangle C''AB = 90° + \beta.$$

Fie $u'' = \sphericalangle AC''B$; din triunghiul BAC'' deducem

$$\frac{h}{\sin u''} = \frac{l''}{\sin 60°},$$

$$\sin u'' = \frac{h}{l''} \sin 60° = \frac{1{,}820}{6{,}088} \sin 60°,$$

$$\lg \sin u'' = 0{,}26007 + \bar{1}{,}93753 - 0{,}78447 = \bar{1}{,}41313,$$
$$u'' = \sphericalangle AC''B = 15°, \quad \sphericalangle C''AB = 90° + \beta = 105°, \quad \beta = 15°.$$

Răspunsul este că rampa și panta sînt egal înclinate pe orizont și anume de un unghi egal cu 15°.

Observație. În tratarea problemei am presupus că poziția este verticală în toate trei cazurile, adică fie că se merge pe drumul orizontal, fie că se urcă rampa sau coboară panta. Presupunem acum că poziția este perpendiculară pe drumul pe care se merge și ne propunem să calculăm lungimea umbrei în cazul rampei și lungimea umbrei în cazul pantei.

Cînd mergem pe drumul orizontal AC, poziția AB este perpendiculară pe AC, înălțimea $AB = h$, iar umbra $AC = f$; triunghiul BAC este dreptunghi în A, deci

$$AC = AB \operatorname{tg} B, \quad f = h \operatorname{tg} B.$$

Cînd urcăm rampa AC', poziția AB' este perpendiculară pe AC', înălțimea $AB' = h$, iar umbra $AC' = f'$, triunghiul $B'AC'$ este dreptunghi în A, deci

$$AC' = AB' \operatorname{tg} B', \quad f' = h \operatorname{tg} B'.$$

Înclinarea rampei este dată de unghiul

$$\alpha = \sphericalangle CAC' = \sphericalangle BAB'.$$

Însă direcția razelor solare este constantă, deci laturile BC și $B'C'$ sînt paralele; fie M punctul de întîlnire al dreptelor AB și $B'C'$; deducem

$$\sphericalangle AMC' = \sphericalangle ABC = \sphericalangle B$$

ca unghiuri corespondente formate de secanta AB cu paralelele BC și $B'C'$. Unghiul AMC' este exterior triunghiului AMB', deci

$$\sphericalangle AMC' = \sphericalangle B' + \sphericalangle \alpha \quad \text{sau} \quad B = B' + \alpha, \quad \alpha = B - B'.$$

Cînd coborîm panta AC'', poziția AB'' este perpendiculară pe AC'', înălțimea $AB'' = h$, iar umbra $AC'' = f''$; triunghiul $B''AC''$ este dreptunghi în A, deci

$$AC'' = AB'' \operatorname{tg} B'', \quad f'' = h \operatorname{tg} B''.$$

Înclinarea pantei este dată de unghiul

$$\beta = \sphericalangle CAC'' = \sphericalangle BAB''.$$

Însă direcția razelor solare este constantă, deci laturile BC și $B''C''$ sînt paralele; fie N punctul de întîlnire al dreptelor AB'' și BC; deducem

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle AB''C'' = \sphericalangle B''$$

ca unghiuri corespondente formate de secanta AB'' cu paralelele BC și $B''C''$. Unghiul ANC este exterior triunghiului ANB, deci

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle B + \sphericalangle \beta \quad \text{sau} \quad B'' = B + \beta, \quad \beta = B'' - B.$$

Din formulele de mai sus deducem

$$\operatorname{tg} B = \frac{f}{h}, \quad \operatorname{tg} B' = \frac{f'}{h}, \quad \operatorname{tg} B'' = \frac{f''}{h},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (B - B') = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} B'}{1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} B'} = \frac{\frac{f}{h} - \frac{f'}{h}}{1 + \frac{ff'}{h^2}}$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = h \frac{f - f'}{h^2 + ff'}.$$

În mod analog se găsește

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{f''}{h} - \frac{f}{h}}{1 + \frac{ff''}{h^2}} = h \frac{ff'' - f}{h^2 + ff''}.$$

Din ultimele două ecuații deducem valorile lui f' și f''

$$f' = h\frac{f - h\operatorname{tg}\alpha}{h + f\operatorname{tg}\alpha}$$

$$f'' = h\frac{f + h\operatorname{tg}\beta}{h - f\operatorname{tg}\beta}.$$

Făcînd înlocuirile

$$\alpha = \beta = 15°, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2 - \sqrt{2}; \quad h = 1{,}820, \quad f = l = 3{,}152,$$

deducem

$$f' = 1{,}820\,\frac{3{,}152 - (2 - \sqrt{3})\,1{,}820}{1{,}820 + (2 - \sqrt{3})\,3{,}152},$$

$$f'' = 1{,}820\,\frac{3{,}152 + (2 - \sqrt{3})\,1{,}820}{1{,}820 - (2 - \sqrt{3})\,3{,}152}.$$

Luînd $\sqrt{3} = 1{,}732$, găsim $2 - \sqrt{3} = 0{,}268$ și

$$(2 - \sqrt{3})\,1{,}820 = 0{,}48776, \quad (2 - \sqrt{3})\,3{,}152 = 0{,}844\,736,$$

$$f' = \frac{1{,}820 \times 2{,}66424}{2{,}664736} = 1{,}820 \text{ m},$$

$$f'' = \frac{1{,}820 \times 3{,}63976}{0{,}975264} = 6{,}792 \text{ m},$$

pentru că $\lg f'' = 0{,}26007 + 0{,}560\,98 - \bar{1}{,}98909 = 0{,}83196$.

Din ecuația $B = B' + \alpha$ deducem înlocuind $B = 60°$ și $\alpha = 15°$ că $B' = 45°$, deci triunghiul dreptunghi $B'AC'$ este isoscel, pentru că și $C' = 45°$, deci $AC' = AB'$, adică $f' = h$ sau $f' = 1{,}820$ m așa cum am găsit prin calcul.

Din ecuația $B'' = B + \beta$ deducem înlocuind $B = 60°$ și $\beta = 15°$ că $B'' = 75°$, deci în triunghiul dreptunghi $B''AC''$ avem

$$AC'' = AB'' \operatorname{tg} 75° \text{ sau } f'' = h \operatorname{tg} 75° = 1{,}820 \times (2 + \sqrt{3}),$$

$$f'' = 1{,}820 \times 3{,}732 = 6{,}794, \text{ m},$$

așa cum am găsit prin calculul direct.

Dacă urcăm rampa și trecem de la poziția verticală la poziția perpendiculară pe drum, umbra se micșorează cu diferența

$$l' - f' = 2{,}228 - 1{,}820 = 0{,}408 \text{ m},$$

iar dacă coborîm panta, umbra se mărește cu diferența

$$f'' - l'' = 6{,}792 - 6{,}088 = 0{,}704 \text{ m}.$$

V.17. *Un observator terestru O, urmărind un avion ce zboară la o înălțime constantă h deasupra solului, observă că acesta este atins de un proiectil în momentul cînd se află în A și face unghiul α cu verticala; ulterior, observă că avionul mai străbate*

o distanță orizontală AB și se prăbușește în B cînd face unghiul β cu verticala.

1. *Să se determine, lungimea distanței AB pe care avionul a putut să se mai mențină în aer după lovire.*

2. *Să se facă formula obținută calculabilă prin logaritmi.*

3. *Să se calculeze numeric lungimea AB pentru $h = 5\,000$ m, $\alpha = 44°27'30''$, $\beta = 59°14'10''$.*

4. *Să se refacă problema determinîndu-se distanța AB în cazul cînd avionul după lovire pierde din înălțime și dreapta AB este o oblică înclinată cu unghiul $\gamma = 45°$ pe orizontală. Avionul și observatorul se vor considera puncte geometrice situate în același plan vertical, iar terenul orizontal.*

Soluție. 1. Fie OC verticala observatorului O și CAB orizontala de zbor a avionului; din triunghiurile dreptunghice OCA și OCB deducem

$$CA = OC \operatorname{tg} \alpha = h \operatorname{tg} \alpha, \quad CB = OC \operatorname{tg} \beta = h \operatorname{tg} \beta,$$

$$AB = CB - CA = h(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha).$$

2. $$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$AB = h\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

3. $$\beta - \alpha = 59°14'10'' - 44°27'30'' = 14°46'40'',$$

$$AB = \frac{5\,000 \sin 14°46'40''}{\cos 44°27'30'' \cos 59°14'10''},$$

$$\lg AB = \lg 5\,000 + \lg \sin 14°46'40'' - \lg \cos 44°27'30'' -$$

$$- \lg \cos 59°14'10'',$$

$$\lg AB = 3{,}69897 + \bar{1}{,}40666 - \bar{1}{,}85354 -$$

$$- 1{,}70884 = \bar{3}{,}54325,$$

$$AB = 3\,493{,}41 \text{ m}.$$

4. Prin ipoteză, oblica AB face cu orizontala CAB' unghiul $\gamma = 45°$; fie B' intersecția orizontalei CA cu oblica OB; din triunghiul dreptunghi OCB' deducem

$$\sphericalangle B' = 90° - \beta = 90° - 59°14'10'' = 30°45'50''.$$

În triunghiul oarecare ABB' cunoaştem:

$$\sphericalangle B' = 30°45'50'',\ \sphericalangle A = \gamma = 45°,\ \sphericalangle B = 180° - \gamma - B' = 104°14'10'',$$

iar latura AB' are lungimea egală cu 3 493,41 m (valoare calculată la punctul 3); teorema sinusurilor dă

$$\frac{AB}{\sin B'} = \frac{AB'}{\sin B}$$

$$AB = \frac{AB' \sin B'}{\sin B} = \frac{3493{,}41 \sin 30°45'50''}{\sin 104° 14'10''}$$

$$\lg AB = \lg AB' + \lg \sin 30°45'50'' - \lg \sin 70°45'50'',$$

pentru că

$$\sin 104°14'10'' = \sin (180° - 104°14'10'') = \sin 75°45'50'';$$

$$\lg AB = 3{,}54325 + \bar{1}{,}70885 - \bar{1}{,}98645 = 3{,}26565,$$

$$AB = 1843{,}50 \text{ m}.$$

V.18. *Cunoscînd valorile* tg 30°, tg 45°, tg 60°, *să se calculeze*

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \operatorname{tg}\frac{30°}{2};$$

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(30° + 45°) = \operatorname{tg}(15° + 60°).$$

Soluţie. Se ştie că $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; pe de altă parte, formulele de adunare ale tangentei sînt

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

de unde deducem

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} = 2 - \sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 3)^2}{9 - 3} = 2 + \sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(15^\circ + 60^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 60^\circ} =$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})\sqrt{3}} = \frac{2}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Din formula $\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$ deducem

$$\operatorname{tg} 2a \, (\operatorname{tg} a)^2 + 2 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 2a = 0,$$

adică $\operatorname{tg} a$ este rădăcină a unei ecuații de gradul al doilea în care coeficienții sînt funcții de $\operatorname{tg} 2a$. Rezolvînd ecuația avem

$$\operatorname{tg} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2a}}{\operatorname{tg} 2a}$$

care pentru $a = 15^\circ$ devine (în fața radicalului se ia semnul plus pentru că $\operatorname{tg} 15^\circ > 0$ și $\operatorname{tg} 30^\circ > 0$).

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 30^\circ}}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \left(-1 + \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \times \sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

În rezumat avem valorile

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}, \ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

V.19. *Să se calculeze produsul*

$$\cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^n a,$$

știind că $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Ce devine formula găsită cînd $a = \frac{b}{2^n}$?

Soluție. Dacă în formula $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$ înlocuim a prin $2a$, apoi prin $4a, \ldots, 2^n a$, obținem

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a},$$

$$\cos 2a = \frac{\sin 4a}{2 \sin 2a},$$

$$\cos 4a = \frac{\sin 8a}{2 \sin 4a},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos 2^n a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2 \sin 2^n a},$$

și dacă facem produsul acestor egalități, membru cu membru și simplificăm termenii în diagonală, obținem

$$\cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^n a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2^{n+1} \sin a}.$$

Dacă înlocuim pe a prin $\frac{b}{2^n}$, formula devine

$$\cos b \cos \frac{b}{2} \cos \frac{b}{4} \ldots \cos \frac{b}{2^n} = \frac{\sin 2b}{2^{n+1} \sin \frac{b}{2^n}}.$$

Partea a doua se mai poate scrie

$$\frac{\sin 2b}{2b} \times \frac{a}{\sin a}$$

și dacă b rămîne fix, iar n tinde către infinit, $a = \frac{b}{2^n} \to 0$, iar $\frac{a}{\sin a} \to 1$ și expresia noastră tinde către $\frac{\sin 2b}{2b} = \frac{\sin b \cos b}{b}$. În fine, dacă suprimăm termenul $\cos b$ în ambele părți, avem cînd b rămîne fix, iar $n \to \infty$,

$$\lim \cos \frac{b}{2} \cos \frac{b}{4} \ldots \cos \frac{b}{2} = \frac{\sin b}{b}.$$

V.20. *Să se arate că ecuația*

$$p \cos 6x + 2(p^2 + 1) \sin 3x - 3p = 0$$

are rădăcini reale, oricare ar fi valoarea parametrului p; *să se calculeze valorile lui* x *cînd* $p = \sqrt{2}$.

Soluție. Pentru rezolvare se înlocuiește $\cos 6x$ în funcție de $\sin 3x$ și se obține o ecuație de gradul al doilea în raport cu necunoscuta $\sin 3x$.

$$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x = 1 - 2 \sin^2 3x,$$

$$p(1 - 2 \sin^2 3x) + 2(p^2 + 1) \sin 3x - 3p = 0,$$

$$-2p \sin^2 3x + 2(p^2 + 1) \sin 3x - 2p = 0,$$

$$(\sin 3x)^2 - \frac{p^2 + 1}{p} \sin 3x + 1 = 0,$$

$$\sin 3x_1 = p, \quad \sin 3x_2 = \frac{1}{p}.$$

Dacă rădăcinile p și $\frac{1}{p}$ sînt egale, adică $p = \frac{1}{p}$ sau $p^2 = 1$, adică $p = \pm 1$, rădăcinile x corespunzătoare sînt reale și egale cu

$$3x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k \frac{\pi}{3}.$$

Dacă rădăcinile p și $\frac{1}{p}$ sînt diferite, adică $p \neq \pm 1$, una din rădăcini, p sau $\frac{1}{p}$, este totdeauna, în valoare absolută, mai mică decît unitatea și cealaltă mai mare ca unitatea, pentru că produsul lor este egal cu $+1$ și aceasta oricare ar fi valoarea parametrului p. Urmează că x-ul corespunzător rădăcinii mai mici ca unitatea, în valoare absolută, este real.

De exemplu, pentru $p = \sqrt{2}$,

$$\sin 3x_1 = \sqrt{2} > 1, \quad x_1 \text{ este imaginar};$$

$$\sin 3x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, \quad x_2 \text{ este real},$$

$$3x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{sau} \quad 3x_2 = -\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{12} + 2k \frac{\pi}{3} \quad \text{sau} \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + (2k + 1) \frac{\pi}{3}.$$

V.21. *Se dă ecuația*

$$(p-1)\cos 2x - (2p^2 - 4p + 4)\cos x + 3p - 3 = 0$$

în care x este necunoscută, iar p un parametru.

1. *Să se calculeze valorile lui x cînd $p = 3$ și $p = \frac{3}{2}$.*

2. *Să se demonstreze că ecuația are rădăcinile reale, oricare ar fi valoarea parametrului p.*

Soluție. Urmînd metoda întrebuințată la problema V.1 înlocuim $\cos 2x$ în funcție de $\cos x$ și obținem o ecuație de gradul al doilea în raport cu $\cos x$, adică

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$(p-1)(2\cos^2 x - 1) - (2p^2 - 4p + 4)\cos x + 3(p-1) = 0,$$

$$2(p-1)\cos^2 x - 2(p^2 - 2p + 2)\cos x + 2(p-1) = 0,$$

$$\cos^2 x - \left(p - 1 + \frac{[1]}{p-1}\right)\cos x + 1 = 0,$$

$$\cos x_1 = p - 1, \quad \cos x_2 = \frac{1}{p-1}.$$

Dacă rădăcinile sînt egale, $p - 1 = \frac{1}{p-1}$ sau $(p-1)^2 = 1$, deci $p(p-2) = 0$, adică $p = 0$ sau $p = 2$, rădăcinile x corespunzătoare sînt reale și egale cu $x = k\pi$.

Dacă rădăcinile $p - 1$ și $\frac{1}{p-1}$ sînt diferite, una din rădăcini este, în valoare absolută, mai mică decît unitatea și cealaltă mai mare ca unitatea, pentru că produsul lor este egal, cu $+1$, oricare ar fi valoarea parametrului p, iar x-ul corespunzător rădăcinii mai mici ca unitatea, în valoare absolută, este real. De fapt, discuția în problema de față se reduce la aceea din problema precedentă dacă în locul parametrului p se consideră parametrul q definit de relația $q = p - 1$.

Pentru $p = 3$, $\cos x_1 = 2 > 1$, x_1 este imaginar; $\cos x_2 = \frac{1}{2} < 1$, x_2 este real și egal cu

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Pentru $p = \frac{3}{2}$, $\cos x_1 = \frac{1}{2}$, x_1 este real și egal cu

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

iar $\cos x_2 = 2 > 1$, deci x_2 este imaginar.

V.22. *Ne găsim pe Valea Cerbului și privim Crucea Eroilor ridicată pe Caraiman la cota* 2291 m; *fie D baza și E vîrful ei, iar C punctul în care dreapta ED prelungită înțeapă planul orizontal în care ne găsim. Alegem în planul nostru o bază AB lungă de* 50 m *și măsurăm cu tachimetrul, înalt de* 1,2 m, *următoarele patru unghiuri, pentru care găsim valorile*:

$\sphericalangle CAB = 89°35'5''$, $\sphericalangle CBA = 89°35'5''$,
$\sphericalangle CAD = 21°14'42''$, $\sphericalangle CAE = 21°43'11''$.

1. *La ce cotă deasupra nivelului mării ne găsim?*
2. *Ce înălțime are Crucea Eroilor?*

Soluție. În triunghiul ABC, situat în planul nostru de nivel, cunoaștem latura $AB = 50$ m și unghiurile adiacente $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 89°35'5''$; triunghiul este deci isoscel, și fie C' mijlocul lui AB. Triunghiul $CC'A$ este dreptunghi în C', unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$ sînt deci complementare; deducem $\sphericalangle ACC' = 0°24'55''$, iar cateta $AC' = 25$ m. Ipotenuza AC se calculează cu formula $AC' = AC \sin 0°24'55''$,

$$AC = \frac{25}{\sin 0°24'55''},$$

$\lg AC = \lg 25 - \lg \sin 0°24'55'' = 1{,}39794 - \bar{3}{,}86021$,
$\lg AC = 3{,}53773$, $AC = 3\,449{,}3$ m.

Am calculat $\lg \sin 0°24'55''$ în felul următor: avem $24' = 1\,440''$; $25' = 1\,500''$; $24'55'' = 1\,495''$.

$\lg \sin 24' = \lg \sin 1\,440'' = \bar{3}{,}84393$,
$\lg \sin 25' = \lg \sin 1\,500'' = \bar{3}{,}86166$,
$S = \bar{6}{,}68557{,}1$
$\lg 1\,495 = 3{,}17464$

prin adunare, $\lg \sin 1\,495'' = \bar{3}{,}86021{,}1$.

În triunghiul dreptunghi ACD cunoaștem $AC = 3\,449{,}3$ m, $\delta = \sphericalangle CAD = 21°14'42''$; deducem

$CA = CA \operatorname{tg} \delta$, $CD = 3\,449{,}3 \operatorname{tg} 21°14'42''$,
$\lg CD = \lg 3\,449{,}3 + \lg \operatorname{tg} 21°14'42''$,
$\lg CD = 3{,}53773 + 1{,}\bar{5}8970 = 3{,}12743$,
$CD = 1\,341$ m.

Am calculat lg tg 21°14′42″ în felul următor:

lg tg 21°14′ = $\bar{1}$,58944,

lg tg 21°15′ = $\bar{1}$,58981,

și la o creștere a arcului de 1′ = 60″ corespunde pentru logaritmul tangentei o creștere de 37 unități zecimale de ordinul al cincilea, deci la o creștere de 42″ va corespunde o creștere egală cu $\frac{37 \times 42}{60} = \frac{37 \times 7}{10} = 25{,}9$ sau aproximativ 26 unități de ordinul al cincilea, deci

lg tg 21°14′42″ = $\bar{1}$,589 44 + 0,000 26 = $\bar{1}$,589 70.

În triunghiul dreptunghi ACE cunoaștem $AC = 3449{,}3$ m, $\varepsilon = \sphericalangle CAE = 21°43'11''$, deci

$CE = CA \operatorname{tg}\varepsilon$, $CE = 3\,449{,}3$ tg 21°43′11″,

lg CE = lg 3 449,3 + lg tg 21°43′11″,

lg CE = 3,537 73 + $\bar{1}$,600 26 = 3,137 99,

$CE = 1\,374$ m.

Înălțimea Crucii este egală cu

$DE = CE - CD = 1\,374 - 1\,341 = 33$ m.

Punctul D are cota 2 291 m, iar punctul C, cota 2 291 — CD = 2 291 − 1 341 = 950 m. Dacă ținem seama și de înălțimea tachimetrului, cota la care ne găsim este egală cu 950 − 1,2 = 948,8 m.

V.23. *Pentru a calcula distanța BC dintre vîrfurile Bucșoiul și Coștila, ale căror cote sînt egale respectiv cu* 2 508 m și 2 496 m, *alegem pe Omul, la cota* 2 509 m, *o bază OA lungă de* 35 m; *fie B', C' proiecțiile vîrfurilor B, C pe planul de nivel de cotă* 2 509 m. *Măsurăm cu tachimetrul patru unghiuri și găsim:*

$\sphericalangle AOB' = 126°18'$; $\sphericalangle OAB' = 52°23'32''$;

$\sphericalangle AOC' = 19°3'$; $\sphericalangle OAC' = 160°43'45''$.

1. *Să se calculeze distanța AB' din triunghiul AOB'.*
2. *Să se calculeze distanța AC' din triunghiul AOC'.*
3. *Să se calculeze distanța $B'C'$ din triunghiul $B'AC'$.*
4. *Să se calculeze distanța BC.*
5. *Prin ce mărime este figurată, pe harta Bucegilor întocmită la scara* $\frac{1}{30\,000}$, *distanța BC?*

Soluţie. 1. În triunghiul $B'OA$ cunoaştem latura $OA = 35$ m şi unghiurile adiacente; rezultă

$$\frac{AB'}{\sin \sphericalangle AOB'} = \frac{OA}{\sin \sphericalangle OB'A}$$

$$\frac{AB'}{\sin 126°18'} = \frac{35}{\sin (180° - 126°18' - 52°23'32'')}$$

$$AB' = \frac{35 \sin 53°42'}{\sin 1°18'28''},$$

$$\lg AB' = \lg 35 + \lg \sin 53°42' - \lg \sin 1°18'28'',$$
$$\lg AB' = 1{,}544\,07 + 1{,}90630 - \bar{2}{,}35838 = 3{,}09199,$$
$$\lg 1\,235 = 3{,}09167, \quad \lg 1\,236 = 3{,}09202,$$

şi prin interpolare, $\lg 1\,235{,}9 = 3{,}09199$, deci

$$AB' = 1\,235,\ 9 \text{ m}.$$

Arcul $1°18'28''$ fiind mic, $\lg \sin 1°18'28''$ a fost calculat în felul următor: se exprimă arcul în secunde, $1°18'28'' = 4\,708'' = s$, se înseamnă $S = \lg \frac{\sin s}{\text{arc } s}$, deci

$$\lg \sin s = (\lg \sin s - \lg s) + \lg s = S + \lg s;$$

găsim în tabele . . . . . $S = \bar{6}{,}685\,53{,}8$
găsim în tabele . . . . . $\lg 4\,708 = 3{,}67284$
prin adunare . . . . . $\lg \sin 4\,708'' = \bar{2}{,}358\,38.$

2. În triunghiul $C'OA$ cunoaştem latura $OA = 35$ m şi unghiurile adiacente, deci

$$\frac{AC'}{\sin AOC'} = \frac{OA}{\sin OC'A},$$

$$\frac{AC'}{\sin 19°3'} = \frac{35}{\sin (180° - 19°3' - 160°43'45'')},$$

$$\frac{AC'}{\sin 19°3'} = \frac{35}{\sin 13'15''}$$

$$\lg AC' = \lg 35 + \lg \sin 19°3' - \lg \sin 13'15''$$
$$\lg AC' = 1{,}54407 + \bar{1}{,}51374 - \bar{3}{,}58594 = 3{,}47187,$$
$$AC' = 2\,964 \text{ m}.$$

Arcul de $13'15'' = 795''$, deci

$$S = \bar{6},68557,4$$
$$\lg 795 = 2,900\,37$$
$$\lg \sin 795'' = \bar{3},58594.$$

3. În triunghiul $B'AC'$ cunoaștem laturile $AB = 1\,235,9$ m, $AC' = 2\,964$ m și unghiul cuprins între ele,

$$\sphericalangle B'AC = \sphericalangle OAC' - \sphericalangle OAB' = 160°43'45'' - 52°23'32'' = 108°20'13''.$$

Lungimea laturei $B'C'$ se calculează cu formula $B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2\ AB' \times AC' \cos \sphericalangle B'AC'$,

$$B'C'^2 = 1\,235,9^2 + 2\,964^2 + 2 \times 1\,235,9 \times 2\,964 \cos 71°39'47''.$$
$$\lg 2 \times 1\,235,9 \times 2\,964 \cos 71°39'47'' =$$
$$= 0,30103 + 3,09199 + 3,47187 + \bar{1},49776 = 6,36265.$$
$$\lg 2\,304\,895 = 6,36265,$$
$$B'C'^2 = 1\,527\,448,81 + 8\,785\,296 + 2\,304\,895 = 12\,617\,639,81$$
$$2 \lg B'C' = 7,10097976,\ \lg B'C' = 3,55048988,\ B'C' = 3552,153 \text{ m}.$$

4. Distanța BC este egală cu ipotenuza într-un triunghi dreptunghi în care o catetă este egală cu $B'C'$, adică proiecția ei pe un plan orizontal, iar cealaltă catetă este egală cu diferența cotelor vîrfurilor B, C, adică $2\,508 - 2\,496 = 12$ m, deci

$$BC^2 = 3\,552,153^2 + 12^2 = 12\,617\,934,965.$$
$$2 \lg BC = 7,10098979,\ \lg BC = 3,55049489,$$
$$BC = 3\,557,191 \text{ m}.$$

Cu aproximație de 1 cm, am găsit $B'C' = 3\,552,15$ m și $BC = 3\,552,20$ m, iar cu aproximație de 1 dm, distanțele $B'C'$ și BC sînt egale cu $3\,552,2$ m; în fine, cu aproximație de 1 m,

$$B'C' = BC = 3\,552 \text{ m}.$$

5. Distanța reală BC este figurată pe hartă prin proiecția ei $B'C'$ pe un plan orizontal; scara fiind luată egală cu $\frac{1}{30\,000}$, înseamnă că distanța $B'C'$ va fi figurată prin segmentul bc a

cărui lungime este egală cu

$$\frac{3\,552 \text{ m}}{30\,000} = \frac{355\,2000 \text{ mm}}{30\,000} = \frac{355{,}2 \text{ mm}}{3} = 118{,}4 \text{ mm},$$

sau aproximativ 118,5 mm.

V.24. *Într-un triunghi, unghiurile sînt proporționale cu numerele* 3, 4, 5; *cu ce numere sînt proporționale laturile triunghiului?*

În alt triunghi, laturile sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5; *cu ce numere sînt egale unghiurile triunghiului?*

Soluție. Fie ABC triunghiul, A, B, C, unghiurile și a, b, c, laturile lui. Prin ipoteză

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{3+4+5} = \frac{180^\circ}{12}$$

$$A = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ, \quad B = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ,$$

$$C = \frac{5 \times 180^\circ}{12} = 75^\circ.$$

Pe de altă parte $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, deci laturile a, b, c sînt proporționale cu sin 45°, sin 60°, sin 75°

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{3}+1)\,\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Dacă înmulțim sinusurile de la numitor cu 4, laturile a, b, c sînt proporționale cu numerele $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

Presupunem în al doilea rînd că laturile a, b, c sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5, deci $a = 3l$, $b = 4l$, $c = 5l$ unde l este coeficientul de proporționalitate. Formula $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ devine

$$25\,l^2 = 9l^2 + 16\,l^2 - 24\,l^2 \cos C$$

adică cos $C = 0$, $C = 90°$, triunghiul ABC este dreptunghi în C, deci $a = c \sin A$, $b = c \sin B$, de unde

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6\,; \quad \sin B = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$\begin{aligned}
&\lg \sin A = \lg 0{,}6 = \bar{1},778\,15\\
&\lg \sin 36°52' = \bar{1},778\,12\\
&\lg \sin 36°53' = \bar{1},778\,29, \quad A = 36°52'11''.\\
&\lg \sin B = \lg 0{,}8 = \bar{1},903\,09\\
&\lg \sin 53°7' = \bar{1},903\,01\\
&\lg \sin 53°8' = \bar{1},903\,11, \quad B = 53°7'48''.
\end{aligned}$$

Ca verificare, $A + B = 36°52'11'' + 53°7'48'' = 89°59'59''$, adică $A + B = 90°$, valoarea calculată fiind o valoare apropiată cu o aproximaţie de $1''$ prin lipsă.

Unghiurile triunghiului sînt deci

$$A = 36°52'11'', \quad B = 53°7'48'', \quad C = 90°.$$

V.25. *Să se discute rădăcinile ecuaţiei*

$$(p + 1) \cos 2x + 2p^2 \sin x + 1 - 3p = 0$$

şi să se calculeze valorile lui x *cînd* $p = \frac{3}{2}$.

Soluţie. Se înlocuieşte cos $2x$ prin $1 - 2 \sin^2 x$ şi ecuaţia devine

$$(p + 1) \sin^2 x - p^2 \sin x + p - 1 = 0,$$

o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu sin x, ale cărei rădăcini sînt $\sin x_1 = p - 1$, $\sin x_2 = \frac{1}{p+1}$.

Rădăcina x_1 este reală dacă $\sin^2 x_1 \leqslant 1$, deci $(p-1)^2 \leqslant 1$,

$$p(p - 2) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2.$$

Rădăcina x_2 este reală dacă $\sin^2 x_2 \geqslant 1$, deci

$$(p + 1)^2 \geqslant 1, \; p(p + 2) \geqslant 0, \; p \leqslant -2.$$

Dacă parametrul p ia toate valorile reale de la $-\infty$ la $+\infty$, putem forma următorul tabel:

$p < -2$, x_1 imaginar, x_2 real;
$-2 < p < 0$, x_1 şi x_2 imaginari;
$0 < p < 2$, x_1 şi x_2 reali;
$2 < p$, x_1 imaginar, x_2 real.

Dacă $p = -2$, $\sin x_2 = -1$, $x_2 = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$.

Dacă $p = 0$, $\sin x_1 = -1$, $x_1 = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$

$$\sin x_2 = 1,\ x_2 = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Dacă $p = 2$, $\sin x_1 = 1$, $x_1 = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$;

$$\sin x_2 = \frac{1}{3}.$$

Pentru $p = \frac{3}{2}$, x_1 și x_2 sînt reali și anume:

$$\sin x_1 = \frac{1}{2},\ x_1 = 30^\circ \text{ și în general}$$

$$x_1 = \left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi \text{ sau } x_1 = \left(2k + 1 - \frac{1}{6}\right)\pi$$

$$\sin x_2 = \frac{2}{5} = 0{,}4;\ \lg \sin x_2 = \bar{1},60206;\ x_2 = 23^\circ 34' 41'';$$

$$x_2 = 23^\circ 34' 41'' + 2k \times 180^\circ \text{ sau } x_2 = (2k+1)\ 180^\circ - 23^\circ 34' 41''.$$

V.26. *Să se calculeze, într-un triunghi oarecare, distanțele ortocentrului la laturi, în funcție de laturile triunghiului și de tangentele unghiurilor.*

Soluție. Fie ABC triunghiul, A', B', C' picioarele înălțimilor, H ortocentrul. În triunghiul dreptunghi $BB'C$, $\sphericalangle HBA' = 90^\circ - C$, deci $\operatorname{tg} \sphericalangle HBA' = \operatorname{ctg} C$; la fel, în triunghiul dreptunghi $CC'B$, $\sphericalangle HCA' = 90^\circ - B$, deci $\operatorname{tg} \sphericalangle HCA' = \operatorname{ctg} B$.

În triunghiurile dreptunghice $HA'B$ și $HA'C$ avem

$$HA' = BA' \operatorname{tg} \sphericalangle HBA' = BA' \operatorname{ctg} C,$$

$$HA' = A'C \operatorname{tg} \sphericalangle HCA' = A'C \operatorname{ctg} B;$$

Deci $BA' = HA' \operatorname{tg} C$, $A'C = HA' \operatorname{tg} B$,

$BA' + A'C = HA' (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B)$, dar $BA' + A'C = BC = a$

$$HA' = \frac{a}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

Prin permutări circulare,

$$HB' = \frac{b}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} \text{ și } HC' = \frac{c}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}.$$

V.27. *Să se rezolve ecuația*

$$\sin 2x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x - \sin 2x + 1 = 0.$$

Soluție. Grupăm termenii în $\sin 2x$ și ecuația devine

$$\sin 2x (\operatorname{tg} x - 1) + 1 - \operatorname{tg} x = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\sin 2x - 1) = 0.$$

Ecuația dată se descompune în următoarele două ecuații:

$$\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ \sin 2x = 1,\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Rădăcinile ecuației date sînt deci $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

O altă metodă pentru rezolvarea ecuației date este să exprimăm $\sin 2x$ în funcție de $t = \operatorname{tg} x$, prin formula

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

și ecuația dată devine

$$\frac{2t^2}{1 + t^2} - t - \frac{2t}{1 + t^2} + 1 = 0,$$

$$2t^2 - 2t + (1 - t)(1 + t^2) = 0,$$

$$-t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = 0,$$

$$(-t + 1)^3 = 0,\ -t + 1 = 0,\ t = 1,\ \operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

V.28. *Să se elimine x între ecuațiile*

$$\sin x + \cos x = a,\ \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = b.$$

Soluție. Prima ecuație ridicată la pătrat dă

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = a^2;$$

$$2 \sin x \cos x = a^2 - 1.$$

A doua ecuație se scrie, aducînd la același numitor,

$$\sin^6 x + \cos^6 x = b \sin^3 x \cos^3 x,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = b \sin^3 x \cos^3 x;$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = b \sin^3 x \cos^3 x,$$

și înlocuind produsul $2 \sin x \cos x$ prin $a^2 - 1$, avem

$$8 - 6(a^2 - 1)^2 = b(a^2 - 1)^3.$$

V.29. *Să se verifice identitatea*

$$y = \frac{\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)} = \frac{(\cos 2a + 3 \cos 2x + 2)}{\cos 2a - \cos 2x}.$$

Pentru ce valoare a parametrului a, funcția y este independentă de x?

Soluție.

$$\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg}(x+a) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} a} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+a) = (3 + 2 \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x},$$

și prin urmare valoarea lui y devine

$$y = \frac{3 + 2 \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Înmulțim la numărător și numitor cu $\cos^2 a \cos^2 x$,

$$y = \frac{3 \cos^2 x \cos^2 a + 2 \sin^2 a \cos^2 x - \sin^2 a \sin^2 x}{\sin(x-a) \sin(x+a)}$$

pentru că

$$\sin^2 x \cos^2 a - \sin^2 a \cos^2 x =$$

$$= (\sin x \cos a - \sin a \cos x) \cdot (\sin x \cos a + \sin a \cos x).$$

Numărătorul în ultima expresie a lui y se mai scrie

$$2 \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 a - \sin^2 x \sin^2 a = 2 \cos^2 x + \cos(x-a) \cos(x+a).$$

Înmulțim numărătorul și numitorul cu 2.

$$y = \frac{4\cos^2 x + 2\cos(x-a)\cos(x+a)}{2\sin(x-a)\sin(x+a)} =$$

$$= \frac{2(1+\cos 2x+\cos 2x+\cos 2a)}{\cos 2a-\cos 2x} = \frac{2+3\cos 2x+\cos 2a}{\cos 2a-\cos 2x},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

Dacă însemnăm $\cos 2x = z$, condiția necesară și suficientă ca raportul

$$y = \frac{3z+\cos 2a+2}{-z+\cos 2a}$$

să fie independent de z, deci de x, este

$$\frac{3}{-1} = \frac{\cos 2a+2}{\cos 2a}$$

de unde deducem $4\cos 2a + 2 = 0$, $\cos 2a = -\frac{1}{2}$

$$2a = \pm 120°,\ a = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Pentru această valoare a parametrului a, valoarea lui y este egală cu -3, oricare ar fi valoarea lui x.

V.30. *Dacă laturile unui triunghi sînt în progresie geometrică, să se demonstreze că rația q a acestei progresii satisface dubla inegalitate*

$$\sqrt{5}-1 \leqslant 2q \leqslant \sqrt{5}+1.$$

Soluție. Laturile a, b, c fiind în progresie geometrică cu rația q, putem scrie $a = a$, $b = aq$, $c = aq^2$. Însă într-un triunghi, o latură este mai mică decît suma celorlalte două și mai mare ca diferența lor, adică

(1) $a \leqslant aq + aq^2$,
(2) $a \geqslant aq - aq^2$,
(3) $a \geqslant aq^2 - aq$,
(4) $aq \leqslant a + aq^2$
(5) $aq \geqslant aq^2 - a$
(6) $aq \geqslant a - aq^2$
(7) $aq^2 \leqslant a + aq$
(8) $aq^2 \geqslant aq - a$
(9) $aq^2 \geqslant a - aq$.

Se vede ușor că inegalitățile (4), (5), (6) se deduc respectiv din (2), (3), (1), iar (7), (8), (9) din (3), (2), (1); prin urmare numai inegalitățile (1), (2), (3) sînt esențiale. Inegalitatea (2) se mai scrie $q^2 - q + 1 = \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, deci (2) este satisfăcută oricare ar fi valoarea lui q. Au rămas în definitiv numai inegalitățile esențiale (1) și (3), care se mai scriu :

$$(1')\ q^2 + q - 1 \geqslant 0 \quad \text{și} \quad (3')\ q^2 - q - 1 \leqslant 0.$$

Dar $q^2 + q - 1 = 0$ are rădăcinile $2q = -1 \pm \sqrt{5}$, iar $q^2 - 1 = 0$, rădăcinile $2q = 1 \pm \sqrt{5}$. Inegalitatea (1') este satisfăcută pentru $2q \leqslant -1 - \sqrt{5}$ sau $-1 + \sqrt{5} \leqslant 2q$; inegalitatea (3') este satisfăcută pentru $1 - \sqrt{5} \leqslant 2p \leqslant 1 + \sqrt{5}$.

Însă q fiind un număr pozitiv, inegalitatea $2q \leqslant -1 - \sqrt{5}$ este imposibilă, iar $1 - \sqrt{5} \leqslant 2q$ este adevărată oricare ar fi numărul pozitiv q. Rămîn în definitiv inegalitățile $-1 + \sqrt{5} \leqslant 2q$ și $2q \leqslant 1 + \sqrt{5}$, ceea ce trebuia demonstrat.

V.31. *Să se rezolve ecuația*

$$\operatorname{arc\,tg}(1 + x) + \operatorname{arc\,tg}(1 - x) = \frac{5\pi}{12}.$$

Soluție. Punem $a = \operatorname{arc\,tg}(1 + x)$, $b = \operatorname{arc\,tg}(1 - x)$, deci $\operatorname{tg} a = 1 + x$, $\operatorname{tg} b = 1 - x$, iar ecuația dată devine $a + b = \frac{5\pi}{12} = 75°$. Arcele $a + b$ și $75°$ fiind egale și tangentele lor trigonometrice sînt egale, adică $\operatorname{tg}(a + b) = \operatorname{tg} 75°$ sau

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \operatorname{tg} 75°,$$

$$\frac{1 + x + 1 - x}{1 - (1 + x)(1 - x)} = \operatorname{tg} 75°, \quad \frac{2}{x^2} = \operatorname{tg} 75°.$$

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

Ecuația $\frac{2}{x^2} = \text{tg } 75°$ devine

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$x^2 = 4 - 2\sqrt{3}, \quad x = \pm\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \pm(\sqrt{3}-1).$$

Ca verificare, pentru $x = \pm(\sqrt{3}-1)$, suma $\text{arctg}\,(1+x)+$ $+ \text{arctg}\,(1-x) = \text{arctg}\,\sqrt{3} + \text{arctg}\,(2-\sqrt{3}) = 60° + 15° = 75°$.

V.32. *Să se calculeze unghiurile B, C și latura c ale triunghiului în care unghiul $A = 15°$, latura $a = \sqrt{3}-1$, latura $b = \sqrt{3}+1$.*

Soluție. Pentru a aplica teorema sinusurilor, calculăm mai întîi

$\sin A = \sin 15° = \sin (45°-30°) = \sin 45° \cos 30° -$ $\cos 45° \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Din formula $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ deducem

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Am găsit că valoarea lui $\sin B$ se deduce din valoarea lui $\sin A$ prin înlocuirea semnului minus cu semnul plus, deci

$$\sin B = \sin (45° + 30°) = \sin 75°.$$

Din ultima ecuație deducem pentru B două valori, $B = 75°$ și $B' = 180°-75° = 105°$, avem deci două triunghiuri care răspund datelor problemei, ABC și $A'B'C'$.

În primul triunghi, $A = 15°$, $B = 75°$, $C = 90°$, iar în al doilea triunghi, $A' = 15°$, $B' = 105°$, $C' = 60°$.

În triunghiul dreptunghi ACB, ipotenuza c este dată de teorema lui Pitagora, $c^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 8$, $c = 2\sqrt{2}$.

În triunghiul $A'B'C'$, teorema sinusurilor dă

$$\frac{c'}{\sin C'} = \frac{a'}{\sin A'} \quad c = a' \frac{\sin C'}{\sin A'}.$$

Însă $a' = \sqrt{3}-1$, $\sin C' = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin A' = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ și făcînd înlocuirile, obținem $c = \sqrt{6}$.

V.33. *Condiția necesară și suficientă ca un triunghi să aibă unghiurile A, B, C în progresie aritmetică și laturile a, b, c în progresie geometrică, este ca triunghiul să fie echilateral.*

Soluție. Presupunem că unghiurile A, B, C sînt în progresie aritmetică, prin urmare termenul mijlociu este egal cu media aritmetică a celorlalți doi, adică $B = \frac{A+C}{2}$.

Prin ipoteză laturile a, b, c sînt în progresie geometrică, adică termenul mijlociu b este egal cu media geometrică a celorlalți doi, adică $b = \sqrt{ac}$ sau $b^2 = ac$. Însă din teorema sinusurilor știm că a, b, c sînt proporționali cu $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, iar ecuația omogenă $b^2 = ac$ poate fi înlocuită cu $\sin^2 B = \sin A \sin C$.

Pentru determinarea unghiurilor A, B, C, avem următoarele trei ecuații

$$A + B + C = 180°, \quad A + C = 2B, \quad \sin^2 B = \sin A \sin C.$$

Din primele două ecuații deducem $B = 60°$, iar ultima ecuație devine $\sin A \sin C = \frac{3}{4}$, pentru că $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sau $2 \sin A \sin C = \frac{3}{2}$ sau $\cos(C-A) - \cos(C+A) = \frac{3}{2}$.

Însă $C + A = 2B = 120°$, $\cos(C+A) = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ și ultima ecuație devine $\cos(C-A) = 1$, deci $C-A = 0$ sau $A = C$. Ecuația $A + C = 2B$ devine $2A = 2B$, $A = B$, deci $A = B = C$, adică unghiurile sînt egale și triunghiul este echilateral, deci am demonstrat că condiția este *necesară*.

O altă demonstrație este următoarea : unghiurile A, B, C fiind presupuse în progresie aritmetică, rezultă ca mai sus că $B = 60°$; laturile a, b, c fiind presupuse în progresie geometrică,

fie q raţia ei, putem scrie că laturile au valorile $a = a$, $b = aq$, $c = aq^2$, iar formula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

devine

$$a^2q^2 = a^2 + a^2q^4 - 2a^2q^2 \times \frac{1}{2}$$

sau simplificînd cu a^2, $1 - 2q^2 + q^4 = 0$; $(q^2-1)^2 = 0$,

$$q^2 = 1, \quad q = \pm 1.$$

Însă q fiind un număr pozitiv, $q = 1$, deci laturile triunghiului sînt $a = a$, $b = a$, $c = a$, adică egale, deci triunghiul este echilateral.

Condiţia este evident şi *suficientă*, căci dacă triunghiul este echilateral, avem $A = B = C$ şi $a = b = c$, de unde deducem $2B = A + C$ şi $b^2 = ac$ şi penultima ecuaţie exprimă că unghiurile A, B, C sînt în progresie aritmetică cu raţia $r = 0$, iar ultima ecuaţie exprimă că laturile a, b, c sînt în progresie geometrică (cu raţia $q = 1$).

V.34. *Două cercuri, ale căror raze sînt r şi $R = 3r$, sînt tangente exterioare, să se calculeze aria triunghiului curbiliniu limitat de aceste două cercuri şi de o tangentă comună lor.*

Soluţie. Fie C şi D centrele celor două cercuri, respectiv mic şi mare, A şi B punctele de tangenţă ale tangentei comune cu cele două cercuri; razele CA şi DB sînt perpendiculare pe tangenta AB, iar linia centrelor CD taie cercurile în punctul lor comun T. Aria triunghiului curbiliniu ATB este egală cu aria trapezului $CABD$, mai puţin ariile sectoarelor circulare ACT şi BDT.

Paralela din C la AB taie raza BD în E şi în triunghiul dreptunghi CED, ipotenuza $CD = CT + TD = r + 3r = 4r$, cateta $ED = BD - BE = BD - AC = 3r - r = 2r$, deci

$$CE^2 = CD^2 - ED^2 = (4r)^2 - (2r)^2 = 12r^2, \quad CE = 2\sqrt{3}\,r.$$

În triunghiul dreptunghi CED, unghiul D este dat de formula $ED = CD \cos D$, $2r = 4r \cos D$, $\cos D = \frac{1}{2}$, $D = 60° = \frac{\pi}{3}$; unghiurile ACT şi BDT fiind suplimentare, rezultă $\sphericalangle ACT = 180° - 60° = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

Aria trapezului $CABD = (AC + BD) \times \frac{CE}{2} = (r+3r) \times$ $\times 2\frac{\sqrt{3}r}{2} = 4\sqrt{3}r^2$.

Aria sectorului circular $ACT = \frac{1}{2} CA^2 \times \sphericalangle ACT =$ $= \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi r^2}{3}$.

Aria sectorului circular $BDT = \frac{1}{2} \cdot DB^2 \times \sphericalangle BDT =$ $= \frac{9r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi r^2}{2}$.

Aria triunghiului curbiliniu $ATB = 4\sqrt{3}r^2 - \frac{\pi r^2}{3} - \frac{3\pi r^2}{2} =$ $= \left(4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}\right) r^2$.

V.35. *Să se rezolve şi să se discute sistemul*

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad \operatorname{tg}(x + y) = b.$$

Soluţie. Însemnăm pentru prescurtare $X = \operatorname{tg} x$, $Y = \operatorname{tg} y$ şi deducem

$$a = X + Y, \quad b = \frac{X + Y}{1 - XY}, \quad b = \frac{a}{1 - XY},$$

sau

$$X + Y = a, \quad XY = 1 - \frac{a}{b}.$$

Necunoscutele X, Y sînt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea

$$t^2 - at + 1 - \frac{a}{b} = 0,$$

şi rădăcinile ei sînt reale dacă discriminantul

$$a^2 - 4\left(1 - \frac{a}{b}\right) \geqslant 0.$$

De exemplu, dacă $a = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$, $b = 2 + \sqrt{3}$, avem

$$a^2 + \frac{4a}{b} - 4 = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{3} + \frac{4(3 - \sqrt{3})}{3} - 4 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9} > 0.$$

Rădăcinile X și Y ale ecuației în t sînt date de

$$2t = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \pm \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \quad X = 1, \quad Y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

adică $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $x = 45°$, $y = 30°$

sau

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + k'\pi.$$

V.36. *Dacă m este un parametru variabil, să se discute ecuația* $\operatorname{tg} 2x = 2m \sin x$.

Soluție. Înlocuim $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2\cos^2 x - 1}$ și ecuația dată devine

$$2 \sin x \left(m - \frac{\cos x}{2\cos^2 x - 1} \right) = 0$$

care admite, oricare ar fi valoarea parametrului m, rădăcinile ecuației $\sin x = 0$, adică $x = k\pi$. Rămîne ecuația

$$2m \cos^2 x - \cos x - m = 0$$

(am înmulțit paranteza mare cu $\cos 2x$, deci presupunem că

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Rădăcinile ecuației în $\cos x$ sînt

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8m^2}}{4m}$$

și valorile corespunzătoare, pentru x sînt reale, dacă $\cos^2 x_1 \leqslant 1$, $\cos^2 x_2 \leqslant 1$, adică

$$\frac{1 + 1 + 8m^2 \pm 2\sqrt{1 + 8m^2}}{16m^2} \leqslant 1;$$

x_1 este real dacă $\sqrt{1 + 8m^2} \leqslant 4m^2 - 1$, (1)

x_2 este real dacă $-\sqrt{1 + 8m^2} \leqslant 4m^2 - 1$. (2)

Vom distinge trei cazuri, după cum $4m^2-1$ este pozitiv, negativ sau nul.

1. Fie $4m^2-1>0$, adică $m<-\frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{2}<m$; inegalitatea (1) are ambele părți pozitive; prin ridicarea la pătrat deducem

$$1+8m^2 \leqslant 16\,m^4-8m^2+1,\ 16m^2(m^2-1)\geqslant 0$$

sau $m^2-1\geqslant 0$, adică $m\leqslant -1$ sau $1\leqslant m$.

Condiția $m^2-1\geqslant 0$ atrage evident după sine $4m^2-1>0$, deci x_1 este real dacă $m\leqslant -1$ sau $1\leqslant m$ și imaginar pentru

$$-1<m<-\frac{1}{2} \text{ sau } \frac{1}{2}<m<1.$$

Inegalitatea (2) este satisfăcută de la sine, pentru că partea întîia, este un număr negativ, iar partea a doua, un număr pozitiv, deci x_2 este real.

2. Fie $4m^2-1<0$, adică $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$; inegalitatea (1) este imposibilă pentru că un număr pozitiv nu poate fi mai mic ca un număr negativ, deci x_1 este imaginar; inegalitatea (2) avînd ambele părți egale cu numere negative, se mai scrie, schimbînd semnele și ridicînd la pătrat,

$$1+8m^2\geqslant 1-8m^2+16\,m^4,$$

$$16m^2(m^2-1)\leqslant 0$$

sau $m^2-1\leqslant 0$, adică $-1\leqslant m\leqslant 1$. Însă această condiție este evident îndeplinită dacă $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$, deci x_2 este real.

3. Dacă $4m^2-1=0$, distingem două cazuri, $m=\pm\frac{1}{2}$; pentru $m=\frac{1}{2}$ avem

$$\cos x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1,\ x_1 \text{ imaginar},$$

$$\cos x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}>-1,\ x_2 \text{ real};$$

pentru $m = -\frac{1}{2}$, avem

$$\cos x_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} < -1, \; x_1 \text{ imaginar},$$

$$\cos x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 1, \; x^2 \text{ real}.$$

În rezumat, x_1 este real numai pentru $m \leqslant -1$ sau $1 \leqslant m$, iar x_2 este real pentru toate valorile parametrului m.

V.37. *Se dă* $\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$, $\cos 2b = \sqrt{\frac{x+y}{2x}}$; *să se găsească relația de legătură dintre* a *și* b.

Soluție. Deducem prin ridicare la pătrat

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{x-y}{x+y}, \quad \cos^2 2b = \frac{x+y}{2x};$$

$$\operatorname{tg}^2 a \cos^2 2b = \frac{x-y}{2x}$$

$$\operatorname{tg}^2 a \cos^2 2b + \cos^2 2b = \frac{x-y+x+y}{2x} = 1,$$

$$\cos^2 2b \, (\operatorname{tg}^2 a + 1) = 1, \quad \cos^2 2b = \cos^2 a,$$

$$\frac{1+\cos 4b}{2} = \frac{1+\cos 2a}{2}, \quad \cos 4b = \cos 2a,$$

$$4b = \pm 2a + 2k\pi, \quad 2b = \pm a + k\pi.$$

V.38. *Să se elimine parametrul* t *între ecuațiile*

$$x = a \cos t \cos 2t, \; y = b \sin t \sin 2t.$$

Soluție. Din ecuațiile date deducem

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \cos t; \; \frac{x^2}{a^2 \cos^2 t} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 t} = 1$$

și între aceste două ecuații se elimină ușor $\cos t$; se găsește

$$\frac{b^2 x^2}{(bx+ay)^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2 - (bx+ay)^2} = 1$$

V.39. *Să se verifice identitatea*

$$y = \frac{\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a)\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)} = \frac{\cos 2a + 3\cos 2x + 2}{\cos 2a - \cos 2x}$$

şi să se determine valoarea lui a pentru care y este independent de x.

Soluţie. Dacă aplicăm formula care dă tangenta sumei sau diferenţei a două arce, deducem prin aducerea la acelaşi numitor,

$$\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg}(x+a) = \frac{2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 a)}{1-\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 a}.$$

În expresia lui y putem deci simplifica la numărător şi numitor cu $\operatorname{tg} x$ şi rămîne

$$y = \frac{3+2\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Înlocuim $\operatorname{tg}^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$ şi pe $\operatorname{tg}^2 x$ prin expresia analogă, înmulţim apoi numărătorul şi numitorul lui y prin produsul $(1+\cos 2x)(1+\cos 2a)$ şi obţinem

$$y = \frac{3\cos 2x + \cos 2a + 2}{-\cos 2x + \cos 2a}$$

şi identitatea este verificată.

Funcţia y este o funcţie omografică de $\cos 2x$ sau o funcţie omografică de $\operatorname{tg}^2 x$. Însă condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie omografică $\frac{AX+B}{CX+D}$ de variabila X să fie independentă de X este $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$.

Dacă privim pe y ca funcţie omografică de $\cos 2x$, condiţia ca y să nu depindă de x este

$$\frac{3}{-1} = \frac{\cos 2a + 2}{\cos 2a}$$

şi din această ecuaţie trigonometrică deducem $\cos 2a = -\frac{1}{2}$, deci

$$a = \pm 60^\circ + k \times 180^\circ.$$

Dacă privim pe y ca funcție omografică de $\operatorname{tg}^2 x$, condiția ca y să nu depindă de x este

$$\frac{-\operatorname{tg}^2 a}{1} = \frac{3 + 2\operatorname{tg}^2 a}{-\operatorname{tg}^2 a}$$

de unde deducem ecuația trigonometrică $\operatorname{tg}^4 a - 2\operatorname{tg}^2 a - 3 = 0$, care are rădăcinile $\operatorname{tg}^2 a = -1$ și $\operatorname{tg}^2 a = 3$, dintre care numai a doua are rădăcini reale, $\operatorname{tg} a = \pm \sqrt{3}$, deci

$$a = \pm 60° + k \times 180°$$

și am regăsit aceleași valori pentru parametrul a.

V.40. *Pe ipotenuza AB a triunghiului dreptunghi ACB, se consideră punctele D și E; să se calculeze aria triunghiului CDE în funcție de catetele a, b și de unghiurile α și β pe care le face AB cu dreptele DC și EC.*

Caz particular $a = 3$ m, $b = 4$ m, $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$.

Soluție. Fie C' proiecția vîrfului C pe ipotenuza AB, fie $h = C'C$ înălțimea; dublul ariei triunghiului ACB este egal cu produsul dintre baza $AB = c$ și înălțimea $C'C = h$, adică ch. Însă triunghiul dreptunghi ACB poate fi considerat că are baza $AC = b$ și înălțimea $BC = a$ (fig. 52), deci dublul ariei lui este egal cu ab. Rezultă $ch = ab$ sau $h = \frac{ab}{c}$. Însă triunghiul fiind dreptunghi, după teorema lui Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$, deci

$$h^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

În triunghiul dreptunghi $DC'C$ avem

$$DC' = C'C \operatorname{ctg} \alpha \text{ sau } DC' = h \operatorname{ctg} \alpha.$$

În triunghiul dreptunghi $EC'C$ avem

$$EC' = C'C \operatorname{ctg} \beta \text{ sau } EC' = h \operatorname{ctg} \beta.$$

Aria S a triunghiului CDE este egală cu diferența ariilor triunghiurilor dreptunghice $DC'C$ și $EC'C$, deci

$$S = \frac{DC' \times C'C}{2} - \frac{EC' \times C'C}{2}$$

$$S = \frac{h^2 (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)}{2},$$

înlocuind pe h^2 cu valoarea găsită mai sus,

$$S = \frac{a^2b^2(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)}{2(a^2+b^2)}.$$

În cazul particular $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$, avem

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg} 75° = \operatorname{ctg}(30° + 45°) = 2 - \sqrt{3},$$

$$S = \frac{9 \times 16}{2 \times 25}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2 + \sqrt{3}\right) = \frac{48\,(2\sqrt{3}-3)}{25}\ \text{m}^2.$$

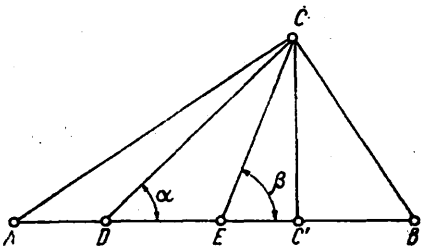


Fig. 52

V.41. *Unghiurile A, B, C ale unui triunghi sînt în progresie aritmetică şi legate prin relaţia* $\sin A \sin C = \cos^2 B$; *să se afle valorile lor.*

Soluţie. Într-un triunghi, suma unghiurilor

$$A + B + C = 180°.$$

Unghiurile fiind în progresie aritmetică, termenul mijlociu B este egal cu media aritmetică a celorlalţi doi termeni, adică $B = \frac{A+C}{2}$.

Din ultimele două ecuaţii deducem $3B = 180°$, deci $B = 60°$; $A + C = 120°$; $C = 120° - A$; $\cos B = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin C = \sin(120° - A) = \sin(60° + A) = \sin 60° \cos A + \cos 60° \sin A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos A + \left(\frac{1}{2}\right)\sin A$.

După înlocuire, ecuaţia dată

$$4 \sin A \sin C = 4 \cos^2 B$$

devine

$$2\sqrt{3} \sin A \cos A + 2 \sin^2 A = 1,$$

$$\sqrt{3} \sin 2A + 1 - \cos 2A = 1,\ \operatorname{tg} 2A = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$2A = 30°,\ A = 15°,\ C = 120° - A = 105°$$

deci unghiurile triunghiului sînt

$$A = 15°,\ B = 60°,\ C = 105°,$$

în progresie aritmetică cu rația egală cu 45°.

V.42. *Dacă un triunghi echilateral, un pătrat și un exagon regulat au perimetrele egale, să se arate că ariile lor sînt proporționale aproximativ cu numerele* 10, 13, 15.

Dacă ariile lor sînt egale, cu ce numere sînt proporționale perimetrele lor?

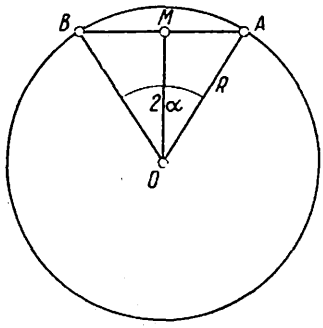


Fig. 53

Soluție. În cercul de centru O și raza R, înscriem poligonul regulat cu n laturi; fie AB una din laturile lui, M mijlocul lui AB, iar unghiul la centru AOB îl însemnăm cu $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (fig. 53).

În triunghiul dreptunghi AMO avem $OA = R$, $\sphericalangle AOM = \alpha$;

$$AM = AO \sin \alpha \text{ și } MO = AO \cos \alpha$$

sau

$$AM = R \sin \alpha \text{ și } MO = R \cos \alpha.$$

Latura $AB = 2AM = 2R \sin \alpha$, deci perimetrul P_n a poligonului este

$$P_n = nAB = 2nR \sin \alpha.$$

Aria triunghiului AOB este

$$\frac{1}{2} AB \times MO = R^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

iar aria S_n a poligonului este

$$S_n = nR^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Pentru a găsi relația dintre perimetrul P_n și suprafața S_n, eliminăm pe R între ecuațiile care definesc pe P_n și S_n și găsim dacă înlocuim pe α cu $\frac{\pi}{n}$,

$$\frac{P_n^2}{S_n} = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Ca verificare, dacă $n \to \infty$, poligonul regulat tinde către cerc, perimetrul P_n către circumferința $2\pi R$, iar suprafața S_n către πR^2, deci raportul $\frac{P_n^2}{S_n} \to 4\pi$.

Pe de altă parte, produsul $4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ se mai scrie $\frac{4\pi \operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ și cînd $n \to \infty$, $\alpha \to 0$, iar raportul $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \to 1$, deci

$$\frac{4\pi \operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \to 4\pi.$$

Pentru $n = 3$ avem triunghiul echilateral, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

$$\frac{P_3^2}{S_3} = 12\sqrt{3}.$$

Pentru $n = 4$ avem pătratul, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$,

$$\frac{P_4^2}{S_4} = 16.$$

Pentru $n = 6$ avem exagonul regulat, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\frac{P_6^2}{S_6} = 8\sqrt{3}.$$

Prin ipoteză aceste trei poligoane au perimetrele egale, adică $P_3 = P_4 = P_6$, rezultă

$$12\sqrt{3}\ S_3 = 16\ S_4 = 8\sqrt{3}\ S_6$$

și dacă împărțim peste tot cu produsul $120\sqrt{3}$, obținem

$$\frac{S_3}{10} = \frac{S_4}{7{,}5\sqrt{3}} = \frac{S_6}{15}.$$

Însă $\sqrt{3} = 1{,}7321$ și $7{,}5\sqrt{3} = 12{,}99075 =$ aproximativ 13, deci cu această aproximație prin lipsă, mai mică decît o sutime,

$$\frac{S_3}{10} = \frac{S_4}{13} = \frac{S_6}{15},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă presupunem că cele trei poligoane au ariile egale, adică $S_3 = S_4 = S_6$, rezultă

$$\frac{P_3^2}{12\sqrt{3}} = \frac{P_4^2}{16} = \frac{P_6^2}{8\sqrt{3}}.$$

Rădăcina pătrată din $12\sqrt{3}$ este egală cu 4,559, iar rădăcina pătrată din $8\sqrt{3}$ este egală cu 3,723. Putem spune că cu aproximație de o unitate, perimetrele sînt proporționale cu numerele 456, 400, 372, adică

$$\frac{P_3}{456} = \frac{P_4}{400} = \frac{P_6}{372},$$

sau dacă înmulțim aceste egalități cu numărul 4, obținem rapoartele

$$\frac{P_3}{114} = \frac{P_4}{100} = \frac{P_6}{93},$$

adică dacă un triunghi echilateral, un pătrat și un exagon regulat au ariile egale, atunci perimetrul triunghiului echilateral este cu 14% mai mare ca perimetrul pătratului, iar perimetrul exagonului regulat este cu 7% mai mic ca perimetrul pătratului.

V.43. *Să se demonstreze identitatea*

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{2(3 + \cos 4x)}{1 - \cos 4x}.$$

Soluție. Pornim de la formula

$$1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x = 8 \sin^2 x \cos^2 x;$$

putem deci înmulți membrul întîi al identității cu $8 \sin^2 x \cos^2 x$ și membrul al doilea cu $1 - \cos 4x$, Obținem

$$8 (\sin^4 x + \cos^2 x) = 4 + 2 (1 + \cos 4x),$$

în care înlocuim

$$1 + \cos 4x = 2 \cos^2 2x = 2 (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 2(\cos^4 x + \sin^4 x - 2 \cos^2 x \sin^2 x)$$

și după simplificarea cu factorul 4, rămîne

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 1 + \cos^4 x + \sin^4 x - 2 \cos^2 x \sin^2 x,$$

sau

$$\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1, (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1,$$

identitate evidentă.

V.44. *Să se rezolve sistemul de ecuații*

$$\sin x + \sin y = a \sin b,$$
$$\cos x + \cos y = a \cos b,$$

a și b fiind constante.

Soluție. Înlocuind suma de sinusuri și suma de cosinusuri prin produse, sistemul dat este echivalent cu sistemul

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2} = a \sin b,$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2} = a \cos b,$$

iar prin împărțirea acestor două ecuații membru cu membru, deducem

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \operatorname{tg} b,$$

de unde

$$\frac{x+y}{2} = b + k\pi, \quad x + y = 2b + 2k\pi.$$

Prima ecuație devine, ținînd seama că

$$\sin \frac{x+y}{2} = \sin (b + k\pi) = \pm \sin b,$$

semnul plus corespunde la k număr par, iar semnul minus la k impar,

$$\cos \frac{y-x}{2} = \pm \frac{a}{2}, \quad \frac{1}{2}(y-x) = \arccos \left(\pm \frac{a}{2} \right).$$

Dacă însemnăm cu $\operatorname{Arc\,cos} \frac{a}{2}$ determinația principală a funcției arc cos $\frac{a}{2}$, adică arcul cuprins între 0° și 180°, ultimele ecuații se scriu

$$x + y = 2b + 2k\pi$$

$$y - x = \pm 2 \operatorname{Arc\,cos} \frac{a}{2} + 2k'\pi,$$

în care numerele, k şi k' sînt ambele pare, sau ambele impare. Prin adunare şi scădere membru cu membru, deducem

$$x = b \pm \operatorname{Arc\,cos} \frac{a}{2} + (k-k')\pi,$$

$$y = b \pm \operatorname{Arc\,cos} \frac{a}{2} + (k+k')\pi.$$

V.45. *Să se arate că*

$$\operatorname{tg}\ 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2.$$

Soluţie. Observăm că $2 \times 7°30' = 15°$ şi $2 \times 15° = 30°$; cunoaştem

$$\operatorname{tg}\ 30° = \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

iar din formula $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ deducem ecuaţia de gradul al doilea în raport cu $\operatorname{tg} x$,

$$\operatorname{tg}\ 2x\ \operatorname{tg}^2 x + 2\ \operatorname{tg}\ x - \operatorname{tg}\ 2x = 0.$$

Dacă $x = 15°$, formula dă $\operatorname{tg} 15° = -\sqrt{3} \pm 2$, însă $\operatorname{tg} 15°$ este un număr pozitiv, deci

$$\operatorname{tg}\ 15° = 2 - \sqrt{3}.$$

Dacă în ultima formulă înlocuim x prin $7°30'$ şi în faţa radicalului luăm semnul plus, pentru că $\operatorname{tg} 7°30' > 0$, obţinem

$$\operatorname{tg}\ 7°30' = (2 + \sqrt{3})\left(-1 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) = -2 - \sqrt{3} + \\ + 2(2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Pentru ca această valoare a lui $\operatorname{tg} 7°30'$ să fie egală cu valoarea dată, trebuie să avem

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2(2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

sau ridicînd la patrat,

$$8 + 4\sqrt{3} = 4(7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

sau simplificînd cu 4,

$$2 + \sqrt{3} = 14 + 8\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 12,$$

egalitate evidentă.

V.46. *Tangentele trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi sînt egale cu numerele* 1, 2, 3; *să se construiască triunghiul şi să se calculeze produsul înălţimilor triunghiului în funcţie de produsul laturilor lui.*

Soluţie. Dacă A, B, C sînt unghiurile triunghiului căutat ABC, este posibil să avem

$$\operatorname{tg} A = 1, \operatorname{tg} B = 2, \operatorname{tg} C = 3,$$

pentru că aceste numere verifică identitatea

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

care există între unghiurile unui triunghi oarecare.

Relaţia $\operatorname{tg} A = 1$ arată că $A = 45°$; pentru construcţia grafică a triunghiului ABC, putem proceda în felul următor (fig. 54): pe un cerc arbitrar luăm punctele B, C aşa fel ca arcul BC să fie egal cu un sfert din lungimea cercului. Dacă A este un punct ales arbitrar pe cerc, unghiul $BAC = 45°$. Pentru a determina poziţia punctului A pe cerc, ridicăm în C perpendiculara CB' pe BC şi luăm $CB' = 2BC$; dreapta BB' taie cercul în punctul căutat A, pentru că în triunghiul dreptunghi BCB', avem $CB' = BC \operatorname{tg} CBB'$ sau $\operatorname{tg} B = 2$.

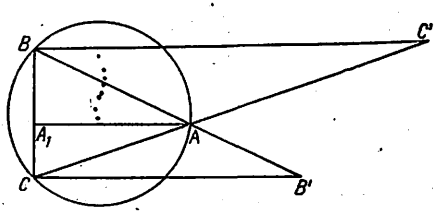


Fig. 54

Pentru verificarea grafică a construcţiei, ducem şi perpendiculara BC' în B pe BC, pe care luăm $BC' = 3\,BC$; dreptele BB' şi CC' trebuie să se taie în punctul A situat pe cerc.

Fie A_1 piciorul înălţimii coborîte din A pe BC; în triunghiul dreptunghi AA_1C, înălţimea $AA_1 = AC \sin C$ sau

$$h_a = b \sin C,$$

iar prin permutări circulare,

$$h_b = c \sin A, \quad h_c = a \sin B,$$

de unde

$$h_a h_b h_c = abc \sin A \sin B \sin C.$$

Însă

$$\sin A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin B = \frac{\operatorname{tg} B}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin C = \frac{\operatorname{tg} C}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 C}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

și făcînd produsul sinusurilor,

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

deci

$$5\, h_a h_b h_c = 3\, abc.$$

Aceasta este relația căutată între produsul înălțimilor și produsul laturilor.

Triunghiul a fost construit pornind de la un cerc a cărui rază este egală cu o lungime arbitrară; rezultă că problema admite o infinitate de soluții, toate triunghiurile fiind asemenea pentru că au unghiurile respective egale.

V.47. 1. *Pe laturile unui dreptunghi, de laturi a și b, se construiesc, în exteriorul lui, triunghiuri echilaterale, și dacă se unesc vîrfurile triunghiurilor, se formează un patrulater; să se calculeze pătratele diagonalelor acestui patrulater.*

2. *Generalizare pentru un paralelogram de laturi a, b și arie S.*

Soluție 1. Fie $ABCD$ dreptunghiul, $AB = a$, $BC = b$ lungimile laturilor lui, aria lui este $S = ab$; fie E, F, G, H vîrfurile triunghiurilor echilaterale construite pe laturile AB, BC, CD, DA. Diagonalele EG și FH sînt axele de simetrie ale dreptunghiului, ele se taie în centrul O al dreptunghiului (fig. 55).

Diagonala $EG = 2\,OE$; însă OE este egal cu $\frac{1}{2}b$ plus înălțimea în triunghiul echilateral AEB de latură a, deci

$$EG = 2\,OE = 2\left(\frac{b}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = b + a\sqrt{3},$$

$$EG^2 = b^2 + 3a^2 + 2ab\sqrt{3}$$

sau

$$EG^2 = 3a^2 + b^2 + 2S\sqrt{3}.$$

Pentru motive de simetrie,

$$FH^2 = a^2 + 3b^2 + 2S\sqrt{3}.$$

2. Să demonstrăm că aceste formule, stabilite în cazul particular al dreptunghiului, rămîn adevărate şi în cazul unui paralelogram.

Fie $ABCD$ paralelogramul, $AB = CD = a$, $BC = DA = b$, α unghiul ADC, aria $S = CD \cdot AD \sin\alpha = ab \sin\alpha$; fie

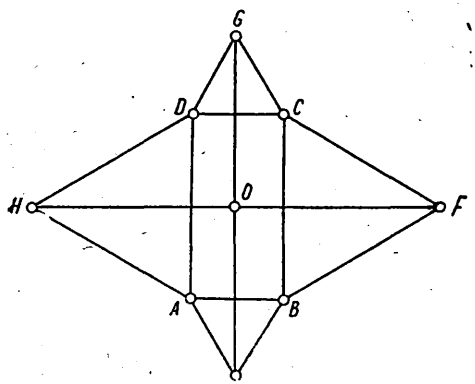


Fig. 55

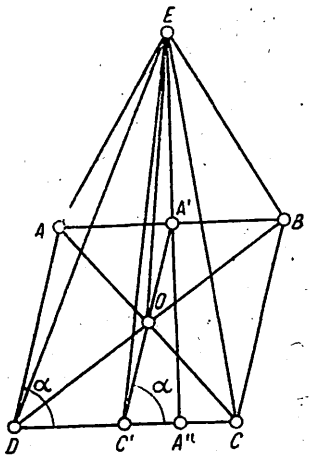


Fig. 56

E, F, G, H vîrfurile triunghiurilor echilaterale construite pe laturile AB, BC, CD, DA, diagonalele EG şi FH ale patrulaterului $EFGH$, trec prin punctul de intersecţie O al diagonalelor paralelogramului, care este centrul de simetrie al figurii.

Pentru a calcula diagonala $EG = 2OE$, însemnăm cu A' şi C' mijloacele laturilor AB şi CD (fig. 56); dreapta $A'C'$ trece prin centrul O şi este paralelă şi egală cu laturile AD şi BC. Teorema medianei aplicată triunghiului $A'EC'$ cu mediana OE spune că

$$A'C'^2 + 4OE^2 = 2(A'E^2 + C'E^2)$$

sau

$$b^2 + EG^2 = \frac{3a^2}{2} + 2C'E^2. \qquad (1)$$

Dreapta $A'E$ este mediană și înălțime în triunghiul echilateral AEB; prelungim dreapta EA' pînă întîlnește latura CD în A''; în triunghiul dreptunghi $A'A''C'$, unghiul din C' este egal cu α, iar ipotenuza $A'C' = b$, catetele lui sînt deci

$$C'A'' = b \cos \alpha, \quad A'A'' = b \sin \alpha.$$

În triunghiul dreptunghi $EA''C'$ cunoaștem cateta

$$C'A'' = b \cos \alpha \text{ și cateta}$$

$$A''E = A''A' + A'E = b \sin \alpha + \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

rezultă că ipotenuza EC' este dată de teorema lui Pitagora,

$$EC'^2 = (b \cos \alpha)^2 + \left(b \sin \alpha + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

sau

$$EC'^2 = b^2 + \frac{3a^2}{4} + ab \sin \alpha \cdot \sqrt{3}. \tag{2}$$

Din formulele (1) și (2) deducem

$$EG^2 = -b^2 + \frac{3a^2}{2} + 2b^2 + \frac{3a^2}{2} + 2\,ab \sin \alpha \cdot \sqrt{3}$$

sau

$$EG^2 = 3a^2 + b^2 + 2S\sqrt{3}. \tag{3}$$

Pentru motive de simetrie,

$$FH^2 = a^2 + 3b^2 + 2S\sqrt{3}. \tag{4}$$

Formulele (3) și (4) rezolvă problema propusă.

V.48. *Fie DBC și EBC triunghiurile echilaterale descrise pe latura BC a triunghiului ABC; să se calculeze:*

1. *Suma* $AD^2 + AE^2$;
2. *Produsul* $AD^2 \cdot AE^2$;
3. *Cosinusul unghiului* DAE,

în funcție de laturile a, b, c ale triunghiului ABC.

Soluție. 1. Fie O mijlocul lui BC; în triunghiurile echilaterale BDC și BEC, medianele OD și OE sînt și înălțimi, deci punctele D, O, E sînt coliniare (fig. 57).

Aplicăm teorema medianei la triunghiul DAE cu mediana OA și apoi la triunghiul BAC cu mediana OA; obținem

$$DE^2 + 4OA^2 = 2(AD^2 + AE^2),$$
$$BC^2 + 4OA^2 = 2(AB^2 + AC^2).$$

Înlocuim $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DE = 2OD = a\sqrt{3}$, pentru că OD este înălțime în triunghiul echilateral de latură a;

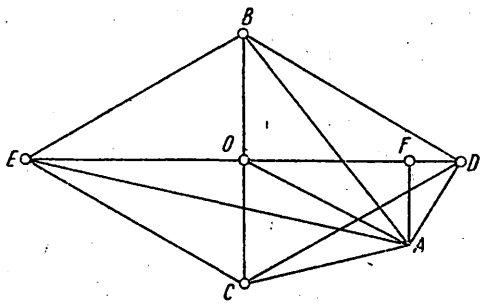


Fig. 57

scădem membru cu membru ultimele două egalități și obținem

$$3a^2 - a^2 = 2(AD^2 + AE^2) - 2(c^2 + b^2),$$

sau

$$AD^2 + AE^2 = a^2 + b^2 + c^2. \qquad (1)$$

2. Însemnăm cu F piciorul perpendicularei coborîte din A pe DE; aplicăm teorema generalizată a lui Pitagora triunghiului DAE și obținem

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2\,DE \cdot DF,$$
$$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2\,DE \cdot EF,$$

iar prin scădere membru cu membru

$$AE^2 - AD^2 = DE\,(EF - DF).$$

Însă $OF = h_a$, înălțimea corespunzătoare vîrfului A în triunghiul BAC, deci

$$EF - DF = EO + OF - (OD - OF) = 2\,OF = 2h_a,$$

şi ultima egalitate devine, cînd înlocuim pe DE prin $a\sqrt{3}$,

$$AE^2 - AD^2 = 2ah_a\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Ridicăm la pătrat relaţiile (1) şi (2) şi apoi le scădem membru cu membru şi obţinem

$$4AE^2 \cdot AD^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 12(ah_a)^2.$$

Însă aria triunghiului ABC este

$$\frac{ah_a}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde $2p = a + b + c$, deci

$$4(ah_a)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) =$$

$$= [-a^2 + (b + c)^2][a^2 - (b-c)^2],$$

şi făcînd înlocuirile,

$$4AD^2 \cdot AE^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 3[a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] =$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 +$$

$$+ 3(a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2),$$

şi împărţind ambii membri cu 4,

$$AD^2 \cdot AE^2 = a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2. \qquad (3)$$

3. Însemnăm cu α unghiul DAE: aplicăm teorema generalizată a lui Pitagora triunghiului DAE,

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos\alpha$$

în care $DE = a\sqrt{3}$ şi ţinem seama de formulele (1) şi (3),

$$3a^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2AD \cdot AE \cos\alpha,$$

de unde

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}}. \qquad (4)$$

Formulele (1), (3) şi (4) rezolvă problema propusă.

Să presupunem că am construit în mod analog triunghiurile echilaterale $CD'A$ și $CE'A$ pe latura CA și triunghiurile echilaterale $AD''B$ și $AE''B$ pe latura AB; însemnăm

$$\beta = \sphericalangle D'BE' \quad \text{și} \quad \gamma = \sphericalangle D''CE''.$$

Valorile lui cos β și cos γ se deduc din formula (4) prin permutări circulare,

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - 2b^2}{2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}}.$$

Unghiurile α, β, γ sînt legate prin două relații trigonometrice remarcabile; prima relație este

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0, \tag{5}$$

care se verifică ușor, pentru că membrul întîi este un raport în care numărătorul este egal cu

$$(b^2 + c^2 - 2a^2) + (c^2 + a^2 - 2b^2) + (a^2 + b^2 - 2c^2) = 0.$$

A doua relație este

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0, \tag{6}$$

care se mai scrie, dacă înlocuim pe cos 2α prin $2\cos^2\alpha - 1$, și la fel pentru cos 2β și cos 2γ,

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 3$$

sau

$$(b^2 + c^2 - 2a^2)^2 + (c^2 + a^2 - 2b^2)^2 + (a^2 + b^2 - 2c^2)^2 = \\ = 6(a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2),$$

identitate evidentă.

Ca exercițiu propunem să se calculeze sumele

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha \tag{7}$$

și

$$\cos 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\beta\cos 2\gamma + \cos 2\gamma\cos 2\alpha. \tag{8}$$

V.49. 1. *Se dă triunghiul echilateral ABC şi se construieşte triunghiul $A'B'C'$ ale cărui laturi sînt: $B'C'$ paralela dusă prin A la BC; $C'A'$ perpendiculara dusă prin B pe AB; $A'B'$ perpendiculara dusă prin C pe AC.*

Să se calculeze unghiurile, laturile şi aria triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de unghiurile şi laturile triunghiului ABC.

2. *Generalizare pentru un triunghi oarecare ABC.*

Soluţie. 1. Rezultă din construcţie şi se vede pe figură că triunghiul $B'A'C'$ este isoscel, iar unghiurile lui sînt (fig. 58)

$$\sphericalangle B' = \sphericalangle C' = 30°, \quad \sphericalangle A' = 120°.$$

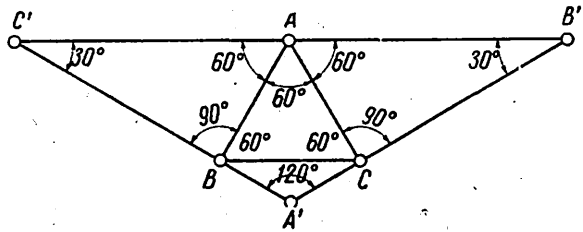


Fig. 58

Fie a latura triunghiului echilateral ABC; din triunghiul dreptunghi ABC'; rezultă $AB = AC' \cos 60°$, deci $AC' = 2a$,

$$a' = B'C' = 2AC' = 4a.$$

În triunghiul $A'B'C'$ mediana $A'A$ este şi înălţime, iar din triunghiul dreptunghi $A'AC'$ deducem $AC' = A'C' \cos 30°$, deci

$$b' = A'C' = \frac{4a}{\sqrt{3}};$$

însă triunghiul $A'B'C'$ fiind isoscel, $b' = c'$, deci laturile lui sînt

$$a' = 4a, \quad b' = c' = \frac{4a}{\sqrt{3}}.$$

Aria S' a triunghiului $A'B'C'$ este dată de relaţia

$$2S' = A'B' \cdot AC + A'C' \cdot AB = c'a + b'a,$$

$$S' = ab' = \frac{4a^2}{\sqrt{3}}.$$

2. Notăm cu a, b, c, A, B, C şi S laturile, unghiurile şi aria triunghiului dat ABC; fie a', b', c', A', B', C' şi S' laturile, unghiurile şi aria triunghiului $A'B'C'$.

Triunghiurile $B'A'C'$ şi $CA'B$ sînt asemenea pentru că au bazele paralele prin construcţie; rezultă că unghiurile lor sînt respectiv egale, adică

$$\sphericalangle A'CB = \sphericalangle B', \quad \sphericalangle A'BC = \sphericalangle C'.$$

Însă $A'C$ fiind dusă perpendicular pe CA, unghiurile B' şi C sînt complementare, deci $\sphericalangle B' = 90° - \sphericalangle C$; la fel, $A'B$ fiind perpendiculară pe BA, $\sphericalangle C' = 90° - \sphericalangle B$ (fig. 59).

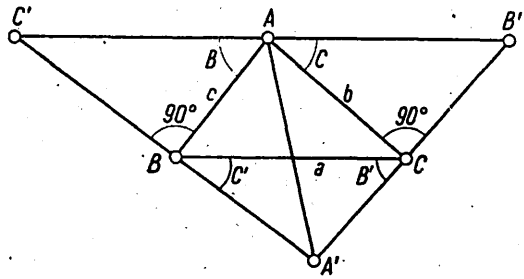


Fig. 59

În triunghiul $CA'B$ cunoscînd unghiurile din C şi B, deducem pentru unghiul A' valoarea

$$\sphericalangle A' = 180° - \sphericalangle B' - \sphericalangle C' = \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A.$$

În triunghiul dreptunghi ABC', unghiurile din A şi C' fiind complementare, $\sphericalangle BAC' = \sphericalangle B$, şi

$$BC' = c \operatorname{tg} B, \quad c = AC' \cos B.$$

La fel, din triunghiul dreptunghi ACB' rezultă $\sphericalangle CAB' = \sphericalangle C$ şi

$$CB' = b \operatorname{tg} C, \quad b = AB' \cos C.$$

În triunghiul oarecare $CA'B$, teorema sinusurilor dă

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{A'B}{\sin B'} = \frac{A'C}{\sin C'}$$

sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{A'B}{\cos C} = \frac{A'C}{\cos B},$$

de unde rezultă

$$A'B = \frac{a \cos C}{\sin A}, \quad A'C = \frac{a \cos B}{\sin A}.$$

Din formulele de mai sus deducem

$$A' = 180° - A, \quad B' = 90° - C, \quad C' = 90° - B;$$

$$a' = B'C' = B'A + AC' = \frac{b}{\cos C} + \frac{c}{\cos B},$$

$$b' = C'A' = C'B + BA' = c \operatorname{tg} B + \frac{a \cos C}{\sin A},$$

$$c' = A'B' = A'C + CB' = \frac{a \cos B}{\sin A} + b \operatorname{tg} C.$$

Pentru a afla aria S', împărțim triunghiul $A'B'C'$ în două triunghiuri $AA'B'$ și $AA'C'$; primul are baza $A'B' = c'$ și înălțimea $AC = b$, al doilea are baza $A'C' = b'$ și înălțimea $AB = c$, deci

$$2S' = c'b + b'c = b^2 \operatorname{tg} C + \frac{ab \cos B}{\sin A} + c^2 \operatorname{tg} B + \frac{ac \cos C}{\sin A},$$

$$2S' \sin A \cos B \cos C = b^2 \sin C \cos B \sin A +$$

$$+ c^2 \sin B \sin A \cos C + ab \cos^2 B \cos C + ac \cos B \cos^2 C.$$

Pentru a găsi pentru aria S' o expresie mai simplă, pornim de la teorema sinusurilor,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

de unde deducem

$$b \sin A = a \sin B, \quad c \sin A = a \sin C,$$

deci

$$2S' \sin A \cos B \cos C = a [b \cos B (\cos B \cos C + \sin B \sin C) +$$

$$+ c \cos C (\cos B \cos C + \sin B \sin C)] = a \cos (B - C)(b \cos B + c \cos C).$$

În sfîrșit, să arătăm că

$$a \cos (B - C) = b \cos B + c \cos C.$$

Formula fiind omogenă în raport cu a, b, c, putem înlocui aceste laturi prin cantităţi proporţionale, de exemplu $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, iar formula care trebuie verificată, devine $\sin A\,(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = \sin B\cos B + \sin C\cos C$ sau înlocuind $\sin A$ prin $\sin(B + C)$, prima parte a identităţii devine

$$(\sin B\cos C + \cos B\sin C)\,(\cos B\cos C + \sin B\sin C) =$$

$$= \sin B\cos B\,(\cos^2 C + \sin^2 C) + \sin C\cos C\,(\sin^2 B + \cos^2 B)$$

egală cu partea doua, $\sin B\cos B + \sin C\cos C$.

Avem deci

$$2S'\sin A\cos B\cos C = a^2\cos^2(B - C),$$

sau, în sfîrşit

$$S' = \frac{a^2\cos^2(B - C)}{2\sin A\cos B\cos C}.$$

Ca verificare, pentru cazul triunghiului echilateral ABC, unde $a = b = c$ şi $A = B = C = 60°$, formulele stabilite în cazul general devin

$$A' = 180° - 60° = 120°,$$

$$B' = 90° - 60° = 30°,$$

$$C' = 90° - 60° = 30°,$$

$$a' = \frac{2a}{\cos 60°} = 4a,$$

$$b' = a\,\mathrm{tg}\,60° + \frac{a\cos 60°}{\sin 60°} = \frac{4a}{\sqrt{3}},$$

$$c' = \frac{a\cos 60°}{\sin 60°} + a\,\mathrm{tg}\,60° = \frac{4a}{\sqrt{3}},$$

$$S' = \frac{a^2\cos^2(60° - 60°)}{2\sin 60°\cos^2 60°} = \frac{4a^2}{\sqrt{3}}.$$

V. 50. *Aria unui dreptunghi este p^2, lungimea fiecărei diagonale este x şi unghiul dintre ele 2α.*

Un al doilea dreptunghi are aria q^2, lungimea fiecărei diagonale x, unghiul dintre ele 4α.

1. *Presupunînd cunoscute p şi q, să se calculeze x, $\sin 2\alpha$, precum şi laturile primului dreptunghi.*

2. *Ce relaţie trebuie să existe între p şi q pentru ca unghiul α să fie egal cu* 15° *sau cu* 30°?

Soluţie. Fie $ABCD$ primul dreptunghi; prin ipoteză diagonalele AC şi BD sînt egale cu x, unghiul $BOC = 2\alpha$, unde O este centrul dreptunghiului, iar aria $AB \cdot AD = p^2$ (fig. 60).

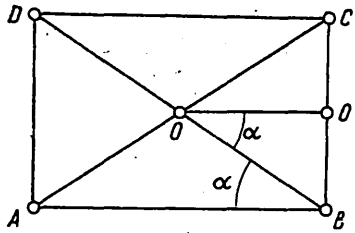


Fig. 60

În triunghiul isoscel BOC, înălţimea OO' este şi bisectoare, rezultă că $\sphericalangle ABD = \alpha$, iar în triunghiul dreptunghi BAD

$$AB = x \cos \alpha, \quad AD = x \sin \alpha,$$

iar aria p^2 a dreptunghiului devine

$$p^2 = x^2 \sin \alpha \cos \alpha. \tag{1}$$

Pentru al doilea dreptunghi avem în mod analog,

$$q^2 = x^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha. \tag{2}$$

1. Ecuaţia (1) se mai scrie

$$2p^2 = x^2 \sin 2\alpha, \tag{3}$$

iar din ecuaţiile (2) şi (3), prin împărţire, deducem

$$\cos 2\alpha = \frac{q^2}{2p^2},$$

şi prin urmare,

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{4p^4 - q^4}}{2p^2}, \tag{4}$$

iar din ecuaţia (3) deducem

$$AC = x = \frac{2p^2}{\sqrt[4]{4p^4 - q^4}}. \tag{5}$$

Pentru a calcula laturile primului dreptunghi, calculăm mai întîi $\cos \alpha$ şi $\sin \alpha$,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{2p^2 + q^2}{4p^2},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{2p^2 - q^2}{4p^2},$$

deducem

$$AB = p\sqrt[4]{\frac{2p^2+q^2}{2p^2-q^2}} \tag{6}$$

$$AD = p\sqrt[4]{\frac{2p^2-q^2}{2p^2+q^2}}. \tag{7}$$

Formulele (4), (5), (6), (7) dau valoarea lui $\sin 2\alpha$, lungimea diagonalei AC și lungimile laturilor AB și AD.

Dacă unghiul BOC al diagonalelor este egal cu 30°, adică $\alpha = 15°$,

$$\frac{q^2}{2p^2} = \cos 2\alpha = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

adică $q^2 = p^2\sqrt{3}$ sau $3p^4 - q^4 = 0$.

Dacă unghiul BOC al diagonalelor este egal cu 60°, adică $\alpha = 30°$, deducem

$$\frac{q^2}{2p^2} = \cos 2\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

adică $p = q$ și cele două dreptunghiuri sînt egale.

V.51. *Să se calculeze valoarea expresiei*

$$34 \sin (a+b) \cos (a-b) - 13 \sin (b+c) \cos (b-c) - 17 \sin - (c+a) \cos (c-a)$$

știind că

$$\sin 2a = \frac{1}{2}, \sin 2b = \frac{2}{3}, \sin 2c = \frac{3}{4}.$$

Soluție. Pornim de la formulele

$$2 \sin (a+b) \cos (a-b) = \sin 2a + \sin 2b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6},$$

$$2 \sin (b+c) \cos (b-c) = \sin 2b + \sin 2c = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12},$$

$$2 \sin (c+a) \cos (c-a) = \sin 2c + \sin 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Înmulțim prima ecuație cu 34, a doua cu -13, pe a treia cu 17 și le adunăm; găsim pentru expresia dată valoarea zero.

V.52. *Să se rezolve ecuațiile.*

1. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 1$
2. $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} 3y = 2 - \sqrt{3}.$
3. $3 \operatorname{tg} z \operatorname{tg} 3z + 1 = 0.$

Soluție. 1. Avem $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, iar ecuația propusă devine

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$$

sau

$$3 \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

de unde deducem

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm 30° + k\,180°.$$

2. Avem

$$\operatorname{tg} 3y = \operatorname{tg}(y + 2y) = \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} 2y}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} 2y}$$

sau

$$\operatorname{tg} 3y = \frac{\operatorname{tg} y (3 - \operatorname{tg}^2 y)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 y}$$

iar ecuația propusă devine

$$\operatorname{tg}^2 y (3 - \operatorname{tg}^2 y) = (2 - \sqrt{3})(1 - 3 \operatorname{tg}^2 y)$$

sau

$$\operatorname{tg}^4 y - 3(3 - \sqrt{3}) \operatorname{tg}^2 y + 2 - \sqrt{3} = 0,$$

ecuație de gradul al doilea în raport cu $\operatorname{tg}^2 y$, ale cărei rădăcini sînt

$$\operatorname{tg}^2 y = 7 - 4\sqrt{3} \text{ și } \operatorname{tg}^2 y = 2 + \sqrt{3}.$$

Din prima ecuație deducem

$$\operatorname{tg} y = \pm (2 - \sqrt{3}), \quad y = \pm 15° + k\,180°,$$

iar din ecuația $\operatorname{tg}^2 y = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73205$ deducem

$$2 \lg \operatorname{tg} y = 0{,}57194, \quad \lg \operatorname{tg} y = 0{,}28597,$$
$$y = \pm 62° 37' 56'' + k\,180°.$$

3. Dacă înlocuim tg $3z$ în funcție de tg z, ecuația propusă devine

$$3\,\mathrm{tg}^2 z\,(3 - \mathrm{tg}^2 z) + 1 - 3\,\mathrm{tg}^2 z = 0$$

sau

$$\mathrm{tg}^4 z - 2\,\mathrm{tg}^2 z - \frac{1}{3} = 0,$$

o ecuație de gradul al doilea n raport cu $\mathrm{tg}^2 z$, cu o rădăcină pozitivă și alta negativă; singură rădăcina pozitivă convine problemei,

$$\mathrm{tg}^2 z = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2{,}1547,$$

$$2 \lg \mathrm{tg}\, z = 0{,}33339,\ \lg \mathrm{tg}\, z = 0{,}16669,$$

$$z = \pm 55^\circ 44' 7'' + k\,180^\circ.$$

V.53. *Un agricultor vrea să traseze un drum rectiliniu de la locuința A la un hambar B, între acestea fiind un pîlc de arbori care împiedică observațiile directe. El nu are decît un lanț pentru măsurat lungimile, astfel că nu poate măsura unghiurile.*

Ce operații trigonometrice trebuie să efectueze agricultorul pentru ca să determine direcția în care va porni drumul din A și să calculeze distanța AB?

Se presupune că terenul pe care sînt așezați arborii și clădirile este perfect plan; alegerea cifrelor este lăsată la latitudinea candidaților.

Soluție. Pentru a determina numai cu lanțul direcția AB, agricultorul trebuie să formeze triunghiuri în care să nu măsoare pe teren decît laturle.

El construiește astfel triunghiurile ABC (pentru ilustrarea metodei e ia $AC = BC = 30$ m) și ADC ($AD = 120$ m, $CD = 50$ m) din ultimul determinîndu-se unghiurile α și C, iar din primul, unghiul A (fig. 61).

Problema revine la următoarea: să se determine un punct D pe latura BC astfel ca $CD^2 + AD^2 = 130^2$.

Cum $(120)^2 + (50)^2 = (130)^2$, triunghiul ADC are unghiul D drept, deci

$$\sin \alpha = \frac{50}{130},\quad \sin C = \frac{120}{130},$$

$$\alpha = 22^\circ 40',\ C = 67^\circ 20'.$$

Din triunghiul isoscel ACB se obţin unghiurile

$$A = B = 90° - \frac{C}{2} = 56° 20'.$$

Agricultorul fixează apoi din C un punct E pe latura AD, ales astfel ca raza vizuală CE să fie cît mai aproape de pădurice, fără însă a o intersecta (vom alege mai simplu $CE = AE = 80$ m). Cum lungimile CE şi DE se pot măsura pe teren ($DE = AD - AE = 40$ m), unghiul β se calculează din triunghiul CDE,

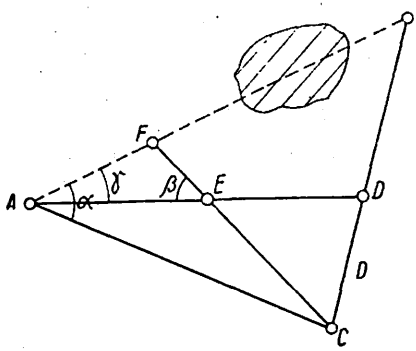


Fig. 61

$$\sin \beta = \frac{50}{80}, \quad \beta = 38° 40',$$

iar unghiul $\gamma = A - \alpha = 33°40'$.

În triunghiul AFE se cunoaşte o latură $AE = 80$ m, precum şi unghiurile alăturate $\beta = 38°40'$, $\gamma = 33°40'$, astfel că lungimea EF se determină prin relaţia sinusurilor

$$\frac{AE}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{EF}{\sin \gamma},$$

$$EF = \frac{80 \sin 33°40'}{\sin 72°20'} = \frac{80 \cdot 0{,}354}{0{,}753} = 46{,}5 \text{ m}.$$

Pe prelungirea dreptei CE se măsoară lungimea $EF = 46{,}5$ m, astfel că dreapta AF este direcţia căutată.

Distanţa AB se calculează din triunghiul isoscel ACB,

$$AB = 2\,AC \sin \frac{C}{2} = 260 \sin 33°40' = 144 \text{ m}.$$

V.54. 1. *Să se calculeze cu ajutorul logaritmilor cea mai mică valoare a lui x dată de relaţia*

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{\cos 56° 33' - 1}{\sin 28° 15' + 1}}.$$

2. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{tg}\frac{3}{4}x = \operatorname{ctg}\frac{5}{8}x$; *să se exprime rezultatul în grade și radiani.*

3. *Fie AOI un triunghi dreptunghi în A și fie B un punct pe latura OI; se înseamnă* $AB=l$, $OB=r$, $AO=x$, $\widehat{AOB}=\theta$ *Să se scrie relația care există între aceste elemente; să se deducă x. Să se arate apoi că derivata lui x în raport cu θ este egală cu* $-r\frac{IA}{IB}$.

Soluție. 1. Pentru a face expresia calculabilă prin logaritmi, utilizăm formulele cunoscute

$$1+\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),\quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{-(1-\cos 56°33')}{1+\sin 28°15'}} = -\sqrt[3]{\frac{\sin^2 28°16'30''}{\sin^2 59°7'30''}}.$$

Dar $-\cos x = \cos(\pi - x)$ și aplicînd logaritmii

$$\lg\cos(\pi-x) = \frac{2}{3}(\lg\sin 28°16'30'' + \operatorname{colg}\sin 59°7'30''),$$

$$\lg\sin 59°07'30'' = \bar{1},93364,\quad \operatorname{colg}\sin 59°07'30'' = 0,06636$$

$$\lg\sin 28°16'30'' = \bar{1},67551$$

$$\bar{1},74187$$

$$\lg\cos(\pi-x) = \bar{1},82791,\quad \pi - x = 47°\,42'\,47'',$$

$$x = 132°\,17'\,13''.$$

2. $\operatorname{tg}\frac{3}{4}x = \operatorname{ctg}\frac{5}{8}x$, dar $\operatorname{ctg}\frac{5}{8}x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{8}x\right)$;

ecuația devine $\operatorname{tg}\frac{3}{4}x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{8}x\right)$. Dar condiția necesară și suficientă ca două arce să aibă aceeași tangentă este ca suma sau diferența lor să fie egală cu un multiplu de π.

$$\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{2} - \frac{5}{8}x = k\pi \text{ sau } \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{2} + \frac{5}{8}x = k\pi.$$

Avem prin urmare două grupe de soluții:

$$x = 4(2k-1)\pi \quad \text{și} \quad x = \frac{4}{11}(2k+1)\pi;$$

în aceste formule x este exprimat în radiani. Pentru a avea valorile corespunzătoare în grade utilizăm relația

x grade $= \frac{\pi}{180} x$ radiani

$$x = (2k-1)\ 720° \text{ și } x = \frac{2k+1}{11}\ 720°.$$

3. În triunghiul ABO avem relația:

$$l^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\theta \text{ sau } x^2 - 2xr\cos\theta + r^2 - l^2 = 0$$

de unde

$$x = r\cos\theta \pm \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta};$$

x este funcție implicită de θ, definită de ecuația

$$x^2 - 2xr\cos\theta + r^2 - l^2 = 0$$

de unde

$$x'_\theta = -\frac{2xr\sin\theta}{2x - 2r\cos\theta}.$$

În triunghiul dreptunghi AOI avem

$$x = (IB + r)\cos\theta,\ IA = (IB + r)\sin\theta.$$

Expresia derivatei x'_θ devine

$$x'_\theta = -\frac{r\sin\theta\,(IB+r)\cos\theta}{IB\cos\theta},\quad x'_\theta = -r\frac{IA}{IB}.$$

V.55. I. *Să se arate că expresia* $y = A\sin x + B\cos x$ *se poate pune sub forma* $y = a\sin(x+u)$; *să se calculeze* a *și* u *prin formule logaritmice.*

Aplicație: $A = 535{,}35,\ B = 273{,}55.$

II. *Să se verifice identitățile*:

1. $16\cos^5 x = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x.$

2. $16\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x.$

III. *Fie O un cerc dat, AB o coardă. Să se arate că pentru ca aria segmentului ACB să fie egală cu aria triunghiului AOB, trebuie ca unghiul la centru AOB = u să fie cuprins între* 108° *şi* 109°.

Soluţie. I. Să punem $\frac{B}{A} = \operatorname{tg} u$. Vom avea

$$y = A\left(\sin x + \frac{B}{A}\cos x\right) = \frac{A}{\cos u}\sin(x+u).$$

Deci

$$a = \frac{A}{\cos u}, \quad u = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}.$$

Aplicaţie.

$$\operatorname{tg} u = \frac{273{,}55}{535{,}35}$$

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tg} u &= \lg 273{,}55 + \operatorname{colg} 535{,}35\\
\lg\ 273{,}55 &= 2{,}4370367\\
\lg\ 535{,}35 &= 2{,}7286378\\
\operatorname{colg}\ 535{,}35 &= \bar{3}{,}2713622\\
\lg \operatorname{tg} u &= \bar{1}{,}7083989\\
\lg \operatorname{tg} 27°3'50'' &= \bar{1}{,}7083621 \quad Dp\ 10'' = 520\\
&\qquad\qquad 368\\
&\qquad p\ 364\ 7''\\
&\qquad\quad 4\ 0{,}08''
\end{aligned}$$

Deci $u = 27°\,3'\,57'',08$.

Să calculăm şi pe

$$a = \frac{A}{\cos u} = \frac{535}{\cos\ 27°3'57''}$$

$$\begin{aligned}
&\lg a = \lg\ 535{,}35 + \operatorname{colg}\ \cos 27°\,3'\,57''\\
&\lg \cos 27°\,3'\,50'' = \bar{1}{,}9496338 \quad D = 108\\
&p\ 7'' \quad -\ 75{,}6\\
&\lg \cos 27°\,3'\,57'' = \bar{1}{,}9496262\\
&\operatorname{colg}\ \cos 27°\,3'\,57'' = 0{,}0503738\\
&\lg a = 2{,}7286378 + 0{,}0503738 = 2{,}7790116
\end{aligned}$$

şi deci $a = 601{,}19$

$$y = 601{,}19 \sin(x + 27°\,3'\,57'',08).$$

II. 1. Plecînd de la prima parte vom avea :

$$16\cos^5 x = 4(2\cos^2 x)^2\cos x = 4(1+\cos 2x)^2\cos x =$$
$$= 4\cos x + 8\cos 2x\cos x + 4\cos^2 2x\cos x.$$

Pentru a doua se poate scrie succesiv :

$$\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x = (\cos 5x + \cos x) +$$
$$+ 5(\cos 3x + \cos x) + 4\cos x = 2\cos 3x\cos 2x +$$
$$+ 10\cos 2x\cos x + 4\cos x = 4\cos x + 8\cos 2x\cos x +$$
$$+ 2\cos 2x(\cos x + \cos 3x) = 4\cos x + 8\cos 2x\cos x +$$
$$+ 4\cos^2 2x\cos x.$$

2. În mod analog se poate verifica şi cea de-a doua identitate. Noi o vom deduce din cea dintîi înlocuind pe x cu $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ În adevăr :

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \sin x;\ \cos 5\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \sin 5x;$$

$$\cos 3\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\sin 3x.$$

Deci

$$16\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x.$$

III.

$$S_{AOB} = \frac{r^2}{2}\sin u \qquad S_{OACB} = \frac{r^2 u}{2}$$

$$S_{ACB} = \frac{r^2 u}{2} - \frac{r^2\sin u}{2}.$$

Deci avem ecuaţia

$$\frac{r^2\sin u}{2} = \frac{r^2 u}{2} - \frac{r^2\sin u}{2}$$

sau

$$f(u) = 2\sin u - u = 0.$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\pi\right) > 0, \qquad f(\pi) < 0.$$

Nu există nici o rădăcină $u_1 > \pi$ a ecuaţiei $f(u) = 0$, căci $\sin u \leqslant 1$ şi deci vom avea întotdeauna

$$f(u_1) = 2\sin u_1 - u_1 < 0.$$

Derivata $f'(u) = 2 \cos u$ este o funcţie continuă în intervalul $(0\ \pi)$ anulîndu-se pentru singura valoare $u = \frac{1}{2}\pi$. Curba reprezentativă a funcţiei $y = f(u)$, plecînd deci de la valoarea iniţială 0 va creşte pînă în punctul de abscisă $u = \frac{1}{2}\ \pi$, în care va prezenta un maxim şi apoi va descreşte, anulîndu-se o singură dată în intervalul $\left(\frac{1}{2}\ \pi,\ \pi\right)$.

Să arătăm că rădăcina ecuaţiei $f(u) = 0$, a cărei existenţă am probat-o, este cuprinsă între arcul de 108° şi arcul de 109°, adică între $\frac{108\pi}{180}$ şi $\frac{109\pi}{180}$.

Va fi suficient să arătăm că pentru aceste valori $f(u)$ ia semne contrarii.

Tabelele liniilor trigonometrice naturale ne dau

$$\sin 108° = \sin 72° = 0{,}951\,;\ 2 \sin 108° = 1{,}902\,;$$
$$\sin 109° = \sin 71° = 0{,}946\,;\ 2 \sin 109° = 1{,}892.$$

Deci

$$f\left(\frac{108\pi}{180}\right) = f\left(\frac{6\pi}{10}\right) = f(0{,}6\ \pi) = 1{,}902 - 1{,}884 > 0,$$

$$f\left(\frac{109\pi}{190}\right) = 1{,}892 - 1{,}902 < 0.$$

VI.

GEOMETRIE ANALITICĂ

VI.1. *Fie sistemul de axe perpendiculare Ox, Oy şi punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $M(\alpha, \beta)$; se cere:*

1. *ecuaţia cercului Γ care trece prin aceste trei puncte;*
2. *ecuaţia tangentei în M la Γ şi locul geometric descris de M, ştiind că această tangentă trece prin punctul fix $C(c, 0)$;*
3. *locul geometric descris de M, ştiind că dreptele MA şi MA' taie axa Oy în B şi B' aşa fel că mijlocul segmentului BB' coincide cu punctul fix $D(0, b)$.*

Soluţie. 1. Punctele A şi A' fiind simetrice în raport cu Oy, centrul lui Γ se găseşte pe Oy; fie $(0, u)$ coordonatele lui; ecuaţia cercului este

$$x^2 + y^2 - 2uy + v = 0.$$

Scriem că punctele M şi A (deci şi A') se găsesc pe cerc

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2u\beta + v = 0, \quad a^2 + v = 0,$$

$$v = -a^2, \quad 2u = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - a^2)}{\beta};$$

ecuaţia cercului Γ este

$$\beta(x^2 + y^2 - a^2) - y(\alpha^2 + \beta^2 - a^2) = 0.$$

2. Ecuaţia tangentei în $M(\alpha, \beta)$ la cerc se deduce din ecuaţia cercului prin dedublare,

$$2\beta(x\alpha + y\beta - a^2) - (y + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - a^2) = 0.$$

Prin ipoteză, această dreaptă trece prin punctul $C(c, 0)$ deci

$$2\beta(\alpha c - a^2) - \beta(\alpha^2 + \beta^2 - a^2) = 0.$$

sau

$$\beta = 0 \text{ şi } \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + a^2 = 0.$$

Soluţia $\beta = 0$ nu convine pentru că altfel M s-ar găsi pe Ox şi cercul Γ, care ar trece prin trei puncte coliniare

M, A, A', s-ar reduce la o dreaptă; rămîne pentru locul geometric descris de punctul M, cercul C, cu centrul în punctul $(c, 0)$,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + a^2 = 0 \text{ sau } x^2 + y^2 - cx + a^2 = 0.$$

Observaţie. Dacă însemnăm

$$2\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}{\beta}, \quad \mu = c,$$

ecuaţiile cercurilor Γ şi C se scriu:

$$(\Gamma)\ x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0; \quad (C)\ x^2 + y^2 - 2\mu x + a^2 = 0$$

şi ele sînt ortogonale, pentru că razele $M\Gamma$ şi MC, în punctul lor de intersecţie M, sînt perpendiculare. Această proprietate este adevărată oricare ar fi λ, adică punctul M ales în plan, şi oricare ar fi μ, adică punctul C ales pe Ox. Dacă dăm parametrilor λ şi μ valori numerice arbitrare, obţinem o infinitate de cercuri Γ şi o infinitate de cercuri C; ele formează o reţea ortogonală, adică fiecare cerc dintr-o familie taie ortogonal toate cercurile din cealaltă familie.

Cercurile Γ trec prin punctele A şi A'; cercurile C nu taie axa Oy, deci un cerc C este sau la dreapta axei Oy şi atunci punctul A este interior lui, sau la stînga axei Oy cînd punctul A' este interior lui.

3. Ecuaţia dreptei MA este $y = \frac{(x-a)\beta}{\alpha - a}$; ea taie axa Oy în punctul B, de coordonate $x = 0, y = -\frac{a\beta}{\alpha - a}$; schimbînd pe a în $-a$, avem coordonatele lui B', $x = 0, y = \frac{a\beta}{\alpha + a}$. Mijlocul segmentului BB' are coordonatele date de sistemul

$$2x = 0, \quad 2y = -\frac{a\beta}{\alpha - a} + \frac{a\beta}{\alpha + a}$$

deci

$$x = 0, \quad y = \frac{a^2\beta}{a^2 - \alpha^2}.$$

Prin ipoteză acest punct coincide cu punctul fix $D(0, b)$, adică

$$b = \frac{a^2\beta}{a^2 - \alpha^2},$$

care se mai scrie

$$\beta - b = -\frac{b}{a^2}\alpha^2 \text{ sau } y - b = -\frac{b}{a^2}x^2.$$

Locul geometric descris de M este o parabolă, cu vîrful în D, care trece prin punctele A şi A', este simetrică în raport cu Oy şi are concavitatea îndreptată către y negativ dacă $b > 0$.

Dacă facem o translație a axelor de coordonate așa fel ca noua origine să fie în D, adică $y - b = Y$, $x = X$, ecuația parabolei în raport cu noul sistem DXY este $Y = -\frac{b}{a^2} X^2$.

Ea este tangentă în D la axa DX, iar focarul ei are coordonatele $X = 0$, $Y = \frac{a^2}{4b}$.

VI.2. *Se dau două axe rectangulare Ox, Oy și prin punctele* : $O\,(0,0)$, $A\,(2a, 0)$, $B\,(0, 2b)$ *se duce un cerc* :

1. *Se va scrie ecuația acestui cerc* ;

Se duce bisectoarea OC a unghiului BOA :

2. *Se va scrie ecuația acestei drepte OC* ;

3. *Se vor calcula coordonatele punctului C, unde bisectoarea taie cercul* : $OC_1 = c_1$, $OC_2 = c_2$.

Din punctul C se coboară o perpendiculară CD pe dreapta AB :

4. *Se vor scrie ecuațiile dreptelor AB și CD* ;

5. *Se vor calcula coordonatele punctului D* ;

6. *Se va arăta că punctele C_1, D, C_2 sînt în linie dreaptă.*

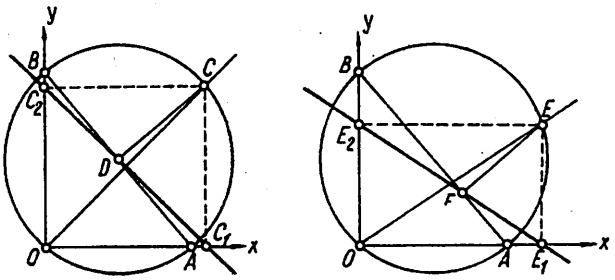


Fig. 62

Soluție. 1. Unghiul AOB fiind drept, AB este un diametru al cercului (fig. 62), deci ecuația cercului este

$$(x - 2a)\,(x - 0) + (y - 0)\,(y - 2b) = 0,$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

pentru că în general fiind date două puncte $P\,(x_1, y_1)$, $Q\,(x_2, y_2)$, ecuația cercului de diametrul PQ este

$$(x - x_1)\,(x - x_2) + (y - y_1)\,(y - y_2) = 0.$$

2. Bisectoarea OC a unghiului xOy este $y = x$.

3. Coordonatele punctului de intersecție dintre cerc și bisectoarea OC se obțin rezolvînd sistemul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0, \quad y = x,$$

sau

$$2x^2 - 2x(a + b) = 0, \quad y = x;$$

obținem două puncte

$$O(x = 0, y = 0) \text{ și } C(x = a + b, y = a + b).$$

Dacă $C_1(c_1, 0)$ și $C_2(0, c_2)$ sînt proiecțiile punctului C pe axele de coordonate, (c_1, c_2) sînt coordonatele lui C, adică

$$c_1 = a + b, \quad c_2 = a + b.$$

4. Ecuația dreptei AB este ($2a$ și $2b$ sînt coordonatele ei la origine)

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0$$

sau

$$bx + ay - 2ab = 0.$$

Coeficientul unghiular al dreptei AB este

$$m = -\frac{b}{a},$$

iar dreapta CD, fiind perpendiculară pe AB, are coeficientul unghiular

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{a}{b}.$$

Dreapta CD trece prin punctul C și are coeficientul unghiular m'; ecuația ei este

$$y - (a + b) = \frac{a}{b}(x - a - b)$$

sau

$$ax - by - a^2 + b^2 = 0.$$

5. Coordonatele punctului D se obțin rezolvînd sistemul format de ecuațiile dreptelor AB și CD

$$bx + ay - 2ab = 0, \quad ax - by - a^2 + b^2 = 0.$$

şi se obţine $x = a, y = b$, adică punctul D coincide cu centrul cercului AOB.

6. Pentru a arăta că punctele C_1, D, C_2 sînt coliniare, scriem ecuaţia dreptei C_1C_2:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b} - 1 = 0,$$

sau

$$x + y - a - b = 0.$$

Această ecuaţie este verificată de coordonatele (a, b) ale punctului D, deci D se găseşte pe dreapta C_1C_2.

Dreapta C_1DC_2 este *dreapta lui Simson* a punctului C, în raport cu triunghiul AOB.

În general, dacă într-un cerc dat se consideră un triunghi înscris oarecare ABC şi dacă M este un punct oarecare al cercului, proiecţiile α, β, γ ale punctului M pe laturile BC, CA, AB, sînt coliniare, iar dreapta $\alpha\beta\gamma$ se numeşte *dreapta lui Simson* a punctului M faţă de triunghiul ABC.

Observaţie. Problema poate fi generalizată în felul următor: prin origine ducem o dreaptă oarecare OE, de ecuaţie $y=kx$, care taie cercul în punctul O şi în punctul E de coordonate

$$x = \frac{2(a+kb)}{1+k^2}, \quad y = 2k\frac{a+kb}{1+k^2}.$$

Punctul E se proiectează pe axele de coordonate în E_1 şi E_2, iar pe dreapta AB în punctul F. Ecuaţia dreptei EF este

$$ax - by - 2\frac{a^2 - k^2b^2}{1+k^2} = 0,$$

iar coordonatele punctului F sînt

$$x = \frac{2a}{1+k^2}, \quad y = \frac{2k^2b}{1+k^2}.$$

Ecuaţia dreptei E_1E_2 este

$$kx(1+k^2) + y(1+k^2) - 2k(a+kb) = 0;$$

ea este verificată de coordonatele punctului F, deci punctele E_1, F, E_2 sînt coliniare şi dreapta E_1FE_2 este *dreapta lui Simson* a punctului E faţă de triunghiul AOE.

Enunţul dat corespunde la cazul particular $k = 1$.

VI.3. *Focarul unei elipse este focarul comun a două parabole ale căror vîrfuri sînt extremităţile axei mari. Să se afle unghiul sub care aceste parabole se taie între ele şi să se calculeze distanţa între cele două puncte de intersecţie.*

Soluție. Fie O centrul elipsei, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $FF' = 2c$ axa mare, axa mică, distanța focală a elipsei, D și E simetricele punctului F față de A și A' respectiv.

Vom lua ca axe de coordonate axele de simetrie ale elipsei. Observăm că $OD = OA + FA = 2a - c$, $OE = OA' + FA' = 2a + c$.

Ecuațiile directoarelor celor două parabole sînt

$$x = 2a - c, \quad x = -(2a + c).$$

Ecuațiile celor două parabole se găsesc aplicînd însăși definiția parabolei. Ele sînt

$$(x - c)^2 + y^2 = (x - 2a + c)^2, \quad (x - c)^2 + y^2 = (x + 2a + c)^2.$$

Făcînd calculele, cele două ecuații se scriu mai simplu, astfel

$$y^2 = 4(c - a)(x - a), \quad y^2 = 4(c + a)(x + a).$$

Să găsim punctele de intersecție. Ecuația care dă abscisele punctelor de intersecție este $(c - a)(x - a) = (c + a)(x + a)$ care admite rădăcina $x = -c$, deci cele două puncte de intersecție ale parabolelor se află pe paralela dusă prin focarul F' al elipsei la axa mică. Făcînd $x = -c$ în una din ecuațiile celor două parabole, găsim $y^2 = 4(-c-a)(c - a) = 4(a^2 - c^2) = 4b^2$, deci $y = \pm 2b$. Așa dar distanța între cele două puncte de intersecție este egală cu $4b$, adică cu îndoitul axei mici.

Să aflăm unghiul sub care se taie cele două parabole. Derivatele lui y pentru punctul de ordonată pozitivă sînt

$$y_1'(-c) = -\sqrt{\frac{a - c}{a + c}}$$

$$y_2'(-c) = +\sqrt{\frac{a + c}{a - c}}.$$

Avem $y_1'(-c)\, y_2'(-c) + 1 = 0$, deci parabolele se taie sub unghi drept.

Fie M unul din punctele de intersecție ale parabolelor, T_1, T_2 intersecțiile cu axa mare ale tangentelor în M la cele două parabole, Q, R proiecțiile lui M pe directoarele parabolelor, iar F'' proiecția lui M pe axa mare a elipsei.

Se știe că MT_1 și MT_2 sînt bisectoarele interne ale unghiurilor FMQ, FMR. Cum aceste unghiuri sînt adiacente supli-

mentare, rezultă că MT_1, MT_2 sînt perpendiculare. Cele două parabole se taie sub unghi drept.

Deoarece $MQ = MR = MF$, rezultă că $F''D = F''E$.

Dar $DE = OD + OE = (2a - c) + (2a + c) = 4a$. Deci $F''D = 2a$.

$$F''D = F''O + OD, \text{ adică } 2a = F''O + 2a - c, F''O = c.$$

Ţinînd seama şi de semne, deducem că punctul F'' se confundă cu F', deci parabolele se taie pe paralela dusă din F' la axa mică.

Se mai ştie că $AT_1 = AF'$ şi $A'T_2 = A'F'$, deci

$$F'T_1 = 2(a + c), F'T_2 = 2(a - c).$$

În triunghiul dreptunghi MT_1T_2 avem

$$MF'^2 = F'T_1 \times F'T_2, \text{ sau } MF'^2 = 4(a^2 - c^2) = 4b^2,$$

$$MF' = 2b.$$

Parabolele avînd aceeaşi axă de simetrie, distanţa dintre punctele lor comune este deci $2 \times 2b = 4b$, adică de două ori axa mică a elipsei.

Proprietatea de ortogonalitate a celor două parabole este, cum se ştie, o proprietate care aparţine tuturor conicelor omofocale. Cele două parabole au focarul comun F şi al doilea focar comun la infinit în direcţia axei mari. Ele se taie deci ortogonal.

VI.4. *Se dă parabola $y^2 = 2x$ şi dreapta $y = 1$. Dintr-un punct al acestei drepte se duc normale la parabolă. Să se discute realitatea lor.*

Soluţie. Fie $M(\alpha, 1)$ un punct pe dreapta $y = 1$, iar x_0, y_0 coordonatele piciorului uneia din normalele duse din M la parabolă, deci $y_0^2 = 2x_0$. Ecuaţia normalei în punctul (x_0, y_0) la parabolă este

$$y - y_0 = -y_0(x - x_0), \text{ sau } y_0 x + y - y_0 - x_0 y_0 = 0.$$

Scriem că această normală trece prin M

$$\alpha y_0 + 1 - y_0 - x_0 y_0 = 0.$$

Înlocuind în această ecuaţie $x_0 = \frac{y_0^2}{2}$, avem

$$y^3{}_0 - 2(\alpha - 1) y_0 - 2 = 0$$

y_0 este dat de o ecuație de gradul al treilea, deci există trei normale din M la parabolă. Aceste trei normale vor fi toate reale cînd ecuația precedentă va avea toate rădăcinile reale (o rădăcină este totdeauna reală, deci una din normale este totdeauna reală). Pentru ca ecuația să aibă cele trei rădăcini reale, se știe că trebuie să fie îndeplinită condiția $4[-2(\alpha-1)]^3 + 27(-2)^2 < 0$, care dezvoltată se mai scrie $-8(\alpha-1)^3 + 27 < 0$,

$$[2(\alpha-1)-3][4(\alpha-1)^2+6(\alpha-1)+9] > 0,$$

$$(2\alpha-5)(4\alpha^2-2\alpha+7) > 0.$$

Paranteza a doua este totdeauna pozitivă, deci rămîne $\alpha > \frac{5}{2}$. Dacă, $\alpha = \frac{5}{2}$, avem o rădăcină dublă, deci două normale sînt confundate.

VI.5. *Într-un punct M al unei parabole se duce tangenta și se unește M cu vîrful A al parabolei. Se cere:*

1. *Să se găsească o relație simplă între liniile trigonometrice ale unghiurilor pe care aceste drepte le fac cu axa parabolei.*

2. *Să se studieze variația unghiului format de aceste drepte determinîndu-se punctul unde el este maxim sau minim.*

Soluție. 1. Fie $y^2 - 2px = 0$, α și β unghiurile pe care tangenta în M și dreapta AM le formează cu axa parabolei, iar V unghiul format de cele două drepte.

Avem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y_0}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0}$. De aici deducem

$$y_0 = p\operatorname{ctg}\alpha,\ x_0 = p\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Înlocuind în relația $y_0^2 - 2px_0 = 0$, avem

$$p^2\operatorname{ctg}^2\alpha - 2p^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = 0, \text{ sau } \operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{ctg}\beta$$

$$\text{sau } \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Această relație simplă se poate stabili și pur geometric. Fie T intersecția tangentei în M cu axa, iar N proiecția lui M pe axă. Dreapta MN este, evident, polara lui T față de parabolă. Punctul A și cu punctul de la infinit al axei sînt deci conjugate armonic față de punctele T și N, adică $AN = AT$,

proprietate cunoscută. În triunghiurile dreptunghice MNA, MNT avem

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{MN}{AN},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{NT} = \frac{MN}{2AN} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta,$$

deci

$$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

2. Să calculăm unghiul V prin tangenta lui, apoi să-i studiem variația. Avem

$$\operatorname{tg}V = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{1+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Luăm derivata,

$$(\operatorname{tg}V)' = \frac{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+2\operatorname{tg}^2\alpha)^2\cos^2\alpha}.$$

Derivata se anulează pentru $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 144°30'$, $\alpha = 35°30'$ aproximativ (am luat arce mai mici decît 180°).

Pentru prima valoare avem un minim, $\operatorname{tg}V = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $V = 160°30'$ aproximativ; pentru a doua valoare avem un maxim, $\operatorname{tg}V = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $V = 19°30'$ aproximativ. Minimul corespunde punctului $M_1(p, -p\sqrt{2})$, iar maximul corespunde punctului $M_2(p, p\sqrt{2})$.

VI.6. *Se dă o parabolă; prin simetricul I al vîrfului O în raport cu directoarea, se duce o dreaptă care taie parabola în A și B. Să se arate că normalele în A și B se întîlnesc într-un punct C al parabolei.*

Prin C se duce perpendiculara pe axă, care o întîlnește în D. Să se determine înclinarea dreptei IAB, astfel ca raportul volumelor născute prin învîrtirea triunghiurilor OAB și OCD în jurul axei să fie constant.

Soluție. Fie $y^2 - 2px = 0$ ecuația parabolei; (x_1, y_1), (x_2, y_2) coordonatele punctelor A și B. Coordonatele lui I sînt $x = -p$, $y = 0$.

Ecuațiile normalelor în A și B la parabolă sînt

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),\ y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2).$$

Coordonatele punctului C se află rezolvînd acest sistem. Se găsesc valorile următoare

$$x = p + \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2},\ y = y_1 y_2 \frac{x_2 - x_1}{p(y_1 - y_2)}.$$

Punctele A și B fiind pe parabolă, avem $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, iar coordonatele lui C devin

$$x = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_1y_2 + 2p^2}{2p},\ y = -y_1y_2\frac{y_1 + y_2}{2p^2}.$$

Scriem că punctele I, A, B sînt coliniare

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ -p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$2p^2(y_2 - y_1) + y_1y_2(y_1 - y_2) = 0,\ y_1y_2 = 2p^2.$$

Pe baza ultimei relații, coordonatele lui C capătă forma

$$x = \frac{(y_1 + y_2)^2}{2p},\ y = -(y_1 + y_2).$$

Se vede că $y^2 - 2px = 0$, deci punctul C se află pe parabolă.

Suprafața rezultată din învîrtirea segmentului AB în jurul axei are expresia $S(AB) = \pi AB(y_1 + y_2)$.

Volumul rezultat din rotirea triunghiului OAB are expresia

$$V(OAB) = \frac{1}{3}\pi AB(y_1 + y_2)d,$$

d fiind distanța punctului O la dreapta AB,

$$d = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{AB},$$

deci

$$V(OAB) = \frac{1}{3}\pi(y_1 + y_2)(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Volumul rezultat din rotirea triunghiului OCD în jurul axei are expresia

$$V(OCD) = \frac{1}{3}\pi CD^2 \times OD = \pi \frac{(y_1 + y_2)^4}{6p}.$$

Ecuația problemei este

$$\frac{1}{3}\pi (y_1 + y_2)\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) = k\pi \frac{(y_1 + y_2)^4}{6p},$$

k = constant. Simplificînd obținem

$2p(x_1 y_2 - x_2 y_1) = k(y_1 + y_2)^3$, sau $y_1 y_2 (y_1 - y_2) = k(y_1 + y_2)^3$, sau

$2p^2 (y_1 - y_2) = k(y_1 + y_2)^3$, deoarece am văzut că $y_1 y_2 = 2p^2$.

Coeficientul unghiular al dreptei IAB este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

Însemnînd $y_1 + y_2 = u$, avem ecuația

$$2p^2 (y_1 - y_2) = ku^3, \text{ sau } 4p^4 (y_1 - y_2)^2 = k^2 u^6,$$

sau

$$4p^4 [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2] = k^2 u^6,\ k^2 u^6 = 4p^4 u^2 + 32\, p^6 = 0.$$

Punînd $u^2 = v$, avem o ecuație de gradul al treilea

$$k^2 v^3 - 4p^4 v + 32p^6 = 0.$$

Această ecuație în v admite o rădăcină negativă, care nu este acceptabilă deoarece în acest caz u este imaginar. Ecuația prezintă două variații deci are două sau nicio rădăcină pozitivă. Pentru ca ecuația să aibă toate rădăcinile reale (și atunci două sînt pozitive cu siguranță) trebuie ca

$$4\left(-\frac{4p^4}{k^2}\right)^3 + 27\left(\frac{32p^6}{k^2}\right)^2 < 0 \quad \text{sau} \quad -\frac{8 \times 32p^{12}}{k^6} + \frac{27 \times 32p^{12}}{k^4} < 0,$$

$$-\frac{1}{k^2} + 4 \times 27 < 0,\ -\frac{1}{6\sqrt{3}} < k < \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Deoarece k este un număr pozitiv reținem numai $k < \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

Dacă această condiție este îndeplinită, atunci ecuația în v are o rădăcină negativă (neacceptabilă) și două pozitive, cărora le corespund patru rădăcini pentru u, două cîte două egale și

de semne contrarii. Avem deci patru valori pentru α, adică patru poziții pentru secanta IAB, două cîte două simetrice față de axa parabolei.

VI.7. *Să se scrie ecuația generală a cercurilor care trec prin origine; să se găsească locul centrelor lor în următoarele două cazuri:*

1. *Cercurile sînt tangente dreptei* $x = a$.

2. *Tangentele la cercurile din familie, duse din punctul* $A(a, 0)$ *sînt perpendiculare.*

Soluție. Ecuația generală a cercurilor care trec prin origine este

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Pentru a scrie că aceste cercuri sînt tangente dreptei $x - a = 0$, vom scrie că distanța de la centrul $I(\alpha, \beta)$ al unui cerc din familie la această dreaptă este egală cu raza cercului, adică

$$\alpha - a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ridicînd la pătrat această ecuație, obținem

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - a)^2.$$

Centrele cercurilor familiei descriu deci curba

$$x^2 + y^2 = (x - a)^2,$$

sau

$$y^2 + a(2x - a) = 0,$$

care este o parabolă cu focarul în O și directoarea

$$x - a = 0.$$

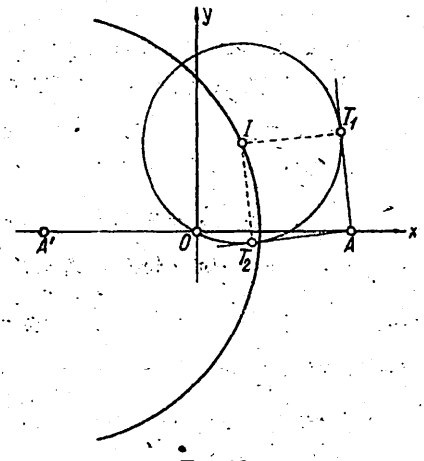


Fig. 63

Să trecem la partea a doua a problemei. Deoarece tangentele din $A(a, 0)$ la cercurile familiei (fig. 63) sînt perpendiculare, rezultă că patrulaterul format de punctele A, I și punctele de contact este un pătrat, deci puterea punctului A față de un cerc al familiei este egală cu pătratul razei acelui cerc, adică

$$a^2 - 2a\alpha = \alpha^2 + \beta^2.$$

Locul geometric al centrelor cercurilor este deci în acest caz cercul

$$x^2 + y^2 + 2ax - a^2 = 0,$$

care are drept centru punctul $A'(-a, 0)$, simetricul lui $A(a, 0)$ față de origine, și raza $a\sqrt{2}$.

Soluție geometrică. Centrul I al unui cerc al familiei fiind la aceeași distanță de punctul fix O și de dreapta $x - a = 0$, care de asemenea este fixă, el descrie parabola care are ca focar originea și ca directoare dreapta $x - a = 0$.

Pentru partea a doua a problemei, observăm că aplicînd teorema medianei la triunghiul IAA', avem

$$A'I^2 + IA^2 = 2OJ^2 + 2\left(\frac{AA'}{2}\right)^2,$$

sau

$$A'I^2 + IA^2 = OI^2 + 2a^2.$$

Dar OI este latura pătratului a cărui diagonală este IA, deci

$$OI = \frac{IA}{\sqrt{2}}.$$

Relația precedentă se scrie deci

$$A'I^2 + IA^2 = IA^2 + 2a^2,\ A'I^2 = 2a^2,\ A'I = a\sqrt{2} = \text{constant}.$$

Deci punctul I descrie în a doua ipoteză cercul cu centrul A' și raza $a\sqrt{2}$.

VI.8. *În punctul M al curbei $y = \frac{1-x}{x^2}$, de abscisă $x = \lambda$, se duce tangenta care întîlnește din nou curba în punctul M'; se notează cu m și m' coeficienții unghiulari ai tangentelor în M și M' la curbă. Să se determine punctele de pe curbă pentru care avem $\frac{m'}{m} > -3$.*

Soluție. Derivata lui y este $y' = \frac{x-2}{x^3}$ și se anulează pentru $x = 2$.

Scrisă sub forma $y' = x\frac{x-2}{x^4}$, se vede că $y' < 0$ pentru $0 < x < 2$ și $y' > 0$ pentru $x < 0$ sau $x > 2$, deci pentru $x = 2$, $y = -\frac{1}{4}$ este un *minim*.

Curba taie axa Ox în punctul de abscisă 1 şi admite axele de coordonate ca asimptote, pentru că $y = 0$ pentru $x = \pm\infty$ şi $x = 0$ pentru $y = \infty$.

Derivata a doua $y'' = 2\,\frac{3-x}{x^4}$ se anulează pentru $x = 3$, care dă un punct de inflexiune al curbei.

Coordonatele punctului M sînt $x = \lambda$, $y = \frac{1-\lambda}{\lambda^2}$, iar coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul M este $m = y'(\lambda) = \frac{\lambda-2}{\lambda^3}$, deci ecuaţia tangentei în M este $y - \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = (\lambda-2)\frac{x-\lambda}{\lambda^3}$ sau $y = (\lambda-2)\frac{x}{\lambda^3} + \frac{3-2\lambda}{\lambda^2}$.

Pentru a afla coordonatele punctului M', tăiem curba cu această dreaptă şi ecuaţia absciselor este

$$\frac{1-x}{x^3} = (\lambda-2)\frac{x}{\lambda^3} + \frac{3-2\lambda}{\lambda^3}$$

sau

$$(\lambda-2)x^3 + \lambda(3-2\lambda)x^2 + \lambda^3 x - \lambda^3 = 0.$$

Această ecuaţie admite rădăcina dublă $x = \lambda$, care corespunde punctului M, şi rădăcina simplă $x = x_1$, care corespunde punctului M'. Produsul rădăcinilor ecuaţiei este

$$\lambda^2 x_1 = \frac{\lambda^3}{\lambda-2}, \text{ deci } x_1 = \frac{\lambda}{\lambda-2}.$$

Ordonata y_1 a lui M' este

$$y_1 = y(x_1) = \frac{1-x_1}{x_1^2} = -2\,\frac{\lambda-2}{\lambda^3}.$$

Coeficientul unghiular m' al tangentei la curbă în punctul M' este

$$m' = y'(x_1) = y'\left(\frac{\lambda}{\lambda-2}\right) = (4-\lambda)\,\frac{(\lambda-2)^3}{\lambda^3}.$$

Condiţia $\frac{m'}{m} > -3$ devine

$$(4-\lambda)(\lambda-2) > -3 \quad \text{sau} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0,$$

adică $1 < \lambda < 5$. Condiţia $\frac{m'}{m} > -3$ este deci verificată pentru punctele curbei care au abscisele cuprinse între 1 şi 5.

VI.9. *Într-un cerc fix O cu raza $2r$ se duce diametrul AB; un cerc mobil are raza r și centrul său C descrie dreapta $y = r$. Să se afle locul geometric descris de punctul P, intersecția coardei comune celor două cercuri cu perpendiculara dusă din C pe diametrul AB* (fig. 64).

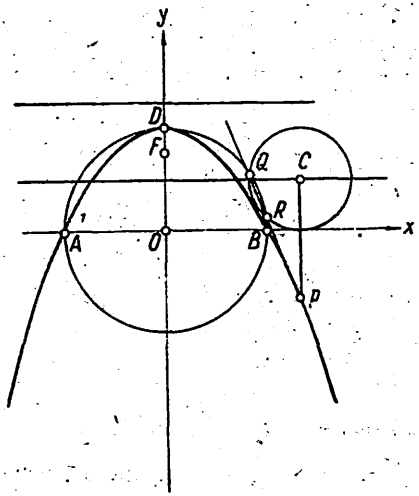


Fig. 64

Soluție. Ecuația cercului O este $x^2 + y^2 = 4r^2$; fie λ abscisa punctului C; ecuația cercului mobil este

$$(x - \lambda)^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2ry + \lambda^2 = 0.$$

Axa radicală, adică coarda comună, a celor două cercuri are ecuația

$$2\lambda x + 2ry - \lambda^2 - 4r^2 = 0$$

și a fost dedusă din ecuațiile celor două cercuri prin scădere membru cu membru.

Coordonatele x și y ale punctului P verifică ecuațiile

$$x = \lambda \quad \text{și} \quad 2\lambda x + 2ry - \lambda^2 - 4r^2 = 0,$$

iar locul geometric descris de punctul P se obține prin eliminarea parametrului variabil λ între aceste două ecuații; se găsește

$$x^2 + 2r(y - 2r) = 0 \text{ sau } x^2 + \left(y - \frac{3r}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{5r}{2}\right)^2$$

care reprezintă parabola cu focarul în $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$ și directoarea $y = \frac{5r}{2}$; ea are vîrful în D și taie axa Ox în A și B.

VI.10. *Se dă hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = r^2$, în planul xOy, și se duce o dreaptă variabilă, paralelă cu axa Ox și care întîlnește hiperbola în două puncte A și B. Unindu-se B cu P și A cu O (P fiind vîrful hiperbolei) aceste două drepte se întîlnesc în punctul M.*

1. *Să se arate că locul geometric al punctului M este o elipsă cu axele paralele cu axele de coordonate.*

2. *Să se construiască elipsa determinîndu-i-se centrul și vîrfurile și să se constate că această elipsă este tangentă interior cercului cu centrul în origine și de rază r.*

3. *Unind A cu Q și B cu Q (Q fiind celălalt vîrf al hiperbolei), aceste două drepte se întîlnesc în punctul N. Să se arate că locul geometric al punctului N este o elipsă egală cu prima și simetrică față de Oy.*

4. *Ambele aceste elipse găsindu-se în interiorul cercului de rază r, să se afle aria cercului exterioară elipselor.*

Soluție. Fie $y=\lambda$ ecuația dreptei variabile AB. Coordonatele punctelor A și B sînt soluțiile sistemului $y=\lambda$, $x^2-y^2=r^2$. Rezolvîndu-l găsim

$$A(\sqrt{r^2+\lambda^2},\ \lambda);\quad B(-\sqrt{r^2+\lambda^2},\ \lambda).$$

Coordonatele vîrfurilor P, Q ale hiperbolei sînt $P(r,\ 0)$, $Q(-r,\ 0)$. Ecuațiile dreptelor BP și AO sînt respectiv

$$\lambda x+(r+\sqrt{r^2+\lambda^2})y-\lambda r=0,\quad y=\frac{\lambda x}{\sqrt{r^2+\lambda^2}}.$$

Locul geometric al punctului M se află eliminînd pe λ între aceste două ecuații.

Eliminarea se poate face în modul următor: rezolvînd sistemul format de cele două ecuații, în raport cu λ și $\sqrt{r^2+\lambda^2}$, deducem

$$\lambda=\frac{ry}{r-2x},\quad \sqrt{r^2+\lambda^2}=\frac{rx}{r-2x}.$$

Eliminarea lui λ între aceste două ecuații se face acum numaidecît. Se ridică ambii membri ai acestor ecuații la pătrat și se înlocuiește în a doua λ^2 cu valoarea scoasă din prima ecuație. Se găsește

$$r^2+\frac{r^2y^2}{(r-2x)^2}=\frac{r^2x^2}{(r-2x)^2}$$

sau

$$3x^2+y^2-4rx+r^2=0.$$

Locul punctului M este această elipsă; pentru a-i determina centrul și axele, vom face descompunerea în pătrate

$$3\left(x^2-\frac{4rx}{3}\right)+y^2+r^2=0 \text{ sau } 3\left(x-\frac{2r}{3}\right)^2+y^2-\frac{r^2}{3}=0,$$

deci

$$\frac{\left(x-\frac{2r}{3}\right)^2}{\left(\frac{r}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{3\sqrt{3}}\right)^2}-1=0.$$

Sub această formă se vede că elipsa are centrul în punctul de coordonate $x=\frac{2r}{3}$, $y=0$, adică punctul care împarte segmentul OP în raportul $\frac{2}{1}$. Semiaxele elipsei sînt $\frac{r}{3}$ şi $\frac{r}{\sqrt{3}}$. Elipsa este, evident, tangentă în P hiperbolei, precum şi cercului $x^2+y^2=r^2$, rămînînd în interiorul cercului. Axa mică a elipsei este aşternută pe Ox, iar cea mare este paralelă cu Oy; elipsa este tangentă la bisectoarele axelor de coordonate în punctele

$$\left(\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}\right) \text{ şi } \left(\frac{r}{2},\ -\frac{r}{2}\right)$$

(fig. 65).

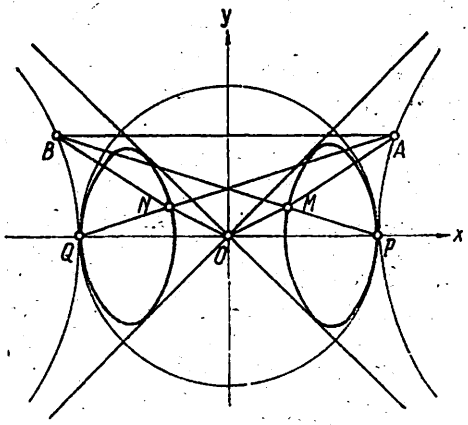


Fig. 65

Locul geometric al punctului N este, evident, simetrica elipsei precedente faţă de axa Oy, deoarece punctul N este intersecţia dreptelor AQ şi BO, simetricele dreptelor BP şi AO faţă de Oy. Această elipsă este deci tangentă interioară în Q cercului

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

Aria uneia din cele două elipse este

$$S=\pi\left(\frac{r}{3}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi r^2}{3\sqrt{3}}.$$

Aria cercului, exterioară celor două elipse, este

$$S_1=\pi r^2\left(1-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right).$$

VI.11. *Se dau două drepte paralele tăiate de o perpendiculară pe ele în A și A'.*

1. *Prin A și A' se duc două drepte AM și $A'M$ care taie cele două paralele în B și B'. Dreptele sînt duse astfel încît produsul $AB \times A'B' = \pm k^2$. (Se va lua semnul plus cînd punctele B și B' sînt de aceeași parte a lui $A'A$ și semnul minus cînd punctele B și B' sînt de o parte și de alta a dreptei $A'A$).*

Paralela dusă din M la AB taie pe BB' în P. Să se determine locul geometric al punctului P cînd direcțiile dreptelor AM și $A'M$ variază.

2. *Perpendiculara dusă din M pe $A'A$ întîlnește pe AA' în C, iar paralela dusă prin mijlocul O al lui AA' la AM taie pe AB în Q. Să se determine punctul M astfel ca să avem $OC + AQ = l$, l fiind o lungime dată. Se va arăta că determinarea lui M depinde de o ecuație de gradul al treilea, în care necunoscuta este coeficientul unghiular al dreptei AM.*

3. *Se presupune că B și B' sînt de o parte și de alta a dreptei AA'. Să se discute natura rădăcinilor ecuației precedente de gradul trei în cazul particular cînd $2l$ este lungimea $A'A$.*

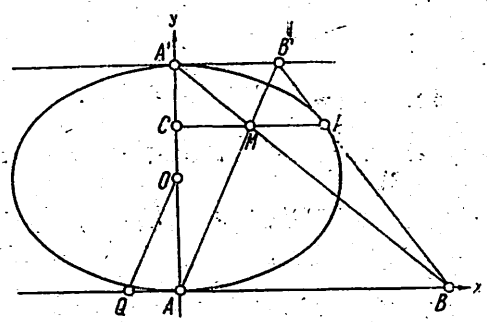


Fig. 66

Soluție. Să luăm un sistem de axe avînd originea în A, prima dreaptă ca axă x și pe AA' ca axă y (fig. 66).

Fie $AA' = a$. Ecuațiile dreptelor AM, $A'M$ sînt de forma

$$y = mx, \quad y - a = nx.$$

Rezolvînd acest sistem, aflăm coordonatele lui M

$$x = \frac{a}{m-n}, \quad y = \frac{ma}{m-n}.$$

Coordonatele punctelor B, B' sînt respectiv

$$B\left(-\frac{a}{n},\ 0\right),\quad B'\left(\frac{a}{m},\ a\right).$$

Relaţia $AB \times A'B' = \pm k^2$ devine

$$mn = h;\left(h = \mp \frac{a^2}{k^2}\right). \tag{1}$$

Dacă $h > 0$, punctele B, B' sînt de o parte şi alta a lui AA'; dacă $h < 0$, punctele B, B' sînt de aceeaşi parte a lui AA'.

Paralela din M la AB are ecuaţia

$$y = \frac{ma}{m-n}; \tag{2}$$

Dreapta BB' are ecuaţia $ax - \left(\frac{a}{m} + \frac{a}{n}\right)y + \frac{a^2}{n} = 0$,

sau

$$mnx - (m+n)\,y + ma = 0. \tag{3}$$

Locul geometric al punctului P se află eliminînd pe m şi n între ecuaţiile (3), (2), (1).

Din (2) rezultă $ma = (m-n)y$; (3) devine

$$mnx - (m+n)y + (m-n)y = 0, \text{ sau } mnx - 2ny = 0.$$

Simplificînd cu $n \neq 0$, rămîne $m = \frac{2y}{x}$. Din (2) rezultă numaidecît $n = 2\frac{y-a}{x}$.

Ducînd aceste valori în (1), găsim $4y(y-a) = hx^2$. Aceasta este ecuaţia locului geometric al punctului P. Ea reprezintă o curbă de gradul al doilea, avînd pe AA' ca axă de simetrie (căci schimbînd x cu $-x$, ecuaţia nu se schimbă), trecînd prin punctele A şi A' şi avînd ca tangente în aceste puncte dreptele AB şi $A'B'$. A doua axă este deci paralela dusă prin O, mijlocul lui AA', la AB (fig. 67).

Dacă scriem ecuaţia precedentă sub forma $hx^2 - 4y^2 + 4ay = 0$, vedem că ea reprezintă o elipsă dacă $h < 0$, adică dacă punctele B, B' sînt de aceeaşi parte a lui AA' şi o hiperbolă

dacă $h > 0$, adică dacă punctele B, B' sînt deoparte și de alta a lui AA'.

Punctele O și C au coordonatele $O\left(0, \frac{a}{2}\right)$; $C\left(0, \frac{ma}{m-n}\right)$ (punctul O este chiar centrul conicei precedente).

Ecuația dreptei dusă prin O paralelă cu AM este $y - \frac{a}{2} = mx$, iar x-ul punctului Q este $x = -\frac{a}{2m}$.

Ecuația $OC + AQ = l$ devine

$$\frac{ma}{m-n} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2m} = l,$$

și înlocuind pe n din (1),

$$\frac{am^2}{m^2 - h} - \frac{a}{2m} = \frac{a}{2} + l.$$

Eliminînd numitorii și ordonînd, obținem următoarea ecuație în m

$$(a - 2l)m^3 - am^2 + h(a + 2l)m + ah = 0.$$

Dacă $2l = a$, iar $h = \frac{a^2}{k^2}$, ecuația se reduce la una de gradul al doilea:

$$-am^2 + \frac{2a^3m}{k^2} + \frac{a^2}{k^2} = 0 \quad \text{sau} \quad k^2m^2 - 2a^2m - a^2 = 0.$$

Realizantul este $R = a^4 + k^2a^2 > 0$, deci rădăcinile sînt totdeauna reale și diferite.

Observație. Se poate demonstra că dreapta BB' este tangentă în P la conica pe care o descrie acest punct; în adevăr vom dovedi că sistemul

$$4y(y - a) = hx^2, \quad mnx - (m + n)y + mq = 0$$

are o rădăcină dublă. Din a doua ecuație $x = (m + n)\frac{y}{mn} - \frac{q}{n}$ și introducînd în prima

$$h\left[(m + n)^2 \frac{y^2}{m^2n^2} + \frac{a^2}{n^2} - 2a(m + n)\frac{y}{mn^2}\right] - 4y^2 + 4ay = 0,$$

sau

$$[h(m + n)^2 - 4m^2n^2]y^2 - 2ma[h(m + n) - 2mn^2]y + a^2h = 0,$$

sau ținînd seama că $mn = h$,

$$h(m - n)^2y^2 - 2mah(m - n)y + a^2m^2h = 0, \quad \{(m - n)y - ma\}^2 = 0.$$

Așa dar sistemul admite soluția dublă

$$y = \frac{ma}{m-n}, \quad x = \frac{2a}{m-n}.$$

Dreapta BB' este deci tangentă la conică în punctul P.

VI.12. *Să se afle rădăcinile ecuației*

$$x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0.$$

Rădăcinile pozitive, în ordine crescătoare, fiind a, b, c, d, $(b = c)$, se vor lua în planul axelor de coordonate Ox, Oy, punctele $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$, $D(0, d)$ și se vor găsi coordonatele punctului E de intersecție al dreptelor AD și BC.

Se va arăta apoi că cercurile EAB și ECD trec prin punctul F, comun cercurilor OAD și OBC, cercuri care au ca al doilea punct comun chiar originea.

Soluție. Ecuația, se vede ușor, admite rădăcinile $x_1 = 1$; $x_2 = x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Punctele A, B, C, D (fig. 67) au deci coordonatele $A(1, 0)$; $B(2, 0)$; $C(0,2)$; $D(0,3)$. Ecuațiile dreptelor AD și BC sînt

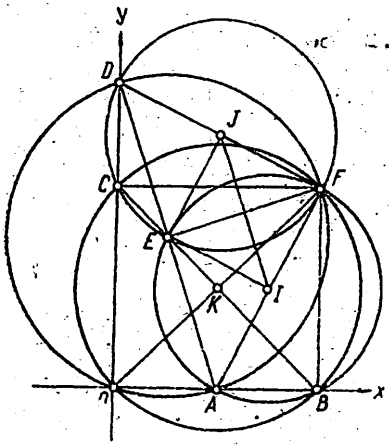


Fig. 67

$$3x + y - 3 = 0; \quad x + y - 2 = 0.$$

Punctul lor E de intersecție are drept coordonate soluțiile acestui sistem, anume

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}.$$

Să găsim ecuațiile cercurilor EAB, ECD. Ecuația generală a unui cerc este

$$x^2 + y^2 + 2ux + 2vy + w = 0.$$

Observăm că $-u$ reprezintă abscisa centrului cercului EAB, centru care se află pe mediatoarea segmentului AB, deci $-u = \frac{3}{2}$. De asemenea w reprezintă puterea punctului O față de acest cerc, deci $w = OA \times OB = 2$.

Ecuația devine $x^2 + y^2 - 3x + 2vy + 2 = 0$. Pentru a determina și pe v vom scrie că cercul trece prin punctul

$E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ şi vom găsi $y = -1$. Ecuaţia cercului EAB este deci

$$x^2 + y^2 - 3x - 2y + 2 = 0. \qquad (1)$$

(Am fi putut determina u, v, w din ecuaţia cercului scriind de la început că cercul trece prin punctele A, B, E; calculul ar fi fost ceva mai lung).

Prin consideraţii asemănătoare stabilim ecuaţia cercului ECD

$$x^2 + y^2 - 2x - 5y + 6 = 0. \qquad (2)$$

Cercurile OAD şi OBC au ca diametru respectiv pe AD şi BC; ecuaţiile lor sînt deci

$$x(x-1) + y(y-3) = 0 \quad \text{şi} \quad x(x-2) + y(y-2) = 0$$

sau

$$x^2 + y^2 - x - 3y = 0 \text{ şi } x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Scăzînd aceste ecuaţii avem $y = x$ şi introducînd în prima $2x^2 - 4x = 0$, deci $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. Cele două cercuri se taie deci în punctele $O(0, 0)$; $F(2, 2)$. Se verifică acum uşor că punctul F aparţine şi cercului (1) şi cercului (2).

Problema se pretează şi la o soluţie geometrică interesantă. Vom demonstra întîi următoarea proprietate: punctul E este mijlocul lui AD. Într-adevăr, aplicînd teorema lui *Menelaus* triunghiului OAD, avem

$$\frac{EA}{ED}\,\frac{CD}{CO}\,\frac{BO}{BA} = +1.$$

Dar pe figură se vede că

$$\frac{CD}{CO} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{BO}{BA} = +\frac{2}{1}$$

deci relaţia lui *Menelaus* dă $\frac{EA}{ED} = -1$, adică E este mijlocul lui AD (fig. 68).

Fie F a doua intersecţie a cercurilor OAD, OBC, iar E şi K — mijloacele segmentelor AD, BC — centrele lor. Punctul F este simetricul lui O faţă de BC, linia centrelor celor două cercuri; dar F este simetricul lui O şi faţă de K, deoarece triunghiul OBC este dreptunghi isoscel (OF este chiar prima bisectoare a axelor). Figura $OBFC$ este deci un pătrat.

Triunghiurile dreptunghice FAB, FCD sînt atunci egale căci au $AB = CD = 1$; $FB = FC = 2$. Din egalitatea lor reiese $FA = FD$. Triunghiul AFD este deci dreptunghi isoscel ($\sphericalangle AFD = 90°$ ca înscris într-un semicerc). Mediana EF este deci înălțime. Observăm acum că patrulaterele $EAFB$ și $ECDF$ sînt inscriptibile în cercurile de diametre FA și FD respectiv, deoarece $\sphericalangle FEA = \sphericalangle FBA = 90°$, $\sphericalangle FED = \sphericalangle FCD = 90°$. Deci cercurile EAB, ECD trec prin punctul F.

Proprietatea aceasta remarcabilă a cercurilor OAD, OBC, EAB, ECD este un caz particular al unei proprietăți mai generale care se enunță în modul următor: *dacă se dau patru drepte care formează un patrulater complet, atunci cercurile circumscrise celor patru triunghiuri, formate cu cîte trei din cele patru drepte, trec prin același punct, care se numește punctul lui Miquel al patrulaterului.*

În cazul nostru, cele patru drepte sînt axele de coordonate și dreptele AD și BC.

Această configurație mai are încă o proprietate pe care o vom verifica în cazul particular al problemei, anume: *centrele celor patru cercuri de mai sus sînt așezate pe același cerc ce trece prin punctul lui Miquel al patrulaterului.*

În cazul de față, centrele celor patru cercuri sînt mijloacele segmentelor AD, BC, FA, FD, adică punctele E, K, I, J. Se observă numaidecît că aceste patru puncte sînt așezate pe cercul de diametru FE.

VI.13. 1. *Se dau cercurile*

$$x^2 + y^2 - 4x = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 0, \tag{2}$$

și fie C_1 și C_2 centrele lor. O secantă dusă prin origine taie curbele respectiv în M_1 și M_2; să se scrie ecuațiile dreptelor M_1C_2 și M_2C_2.

2. *Să se găsească locul geometric al intersecției acestor drepte, cînd secanta se rotește în jurul originei.*

3. *$y = f(x)$ fiind ecuația (1) rezolvată în raport cu y, să se calculeze $y' = f'(x)$ și să se studieze variația acestei derivate.*

Soluție. 1. Ecuația (1) reprezintă un cerc trecînd prin origine, avînd centrul $C_1(2,0)$ pe axa Ox și raza 2; ecuația (2) reprezintă un cerc care de asemenea trece prin origine, are centrul $C_2(-1,0)$ pe Ox și raza 1. Cele două cercuri sînt tangente axei Oy (fig. 68).

Ecuația unei secante care trece prin origine este $y = \lambda x$; intersectînd această secantă cu cercurile (1) și (2), găsim coordonatele punctelor M_1 și M_2 $\left(\text{am notat } \frac{1}{1-\lambda^2} = \mu\right)$.

$$M_1(4\mu,\ 4\lambda\mu),\ M_2(-2\mu,\ -2\lambda\mu).$$

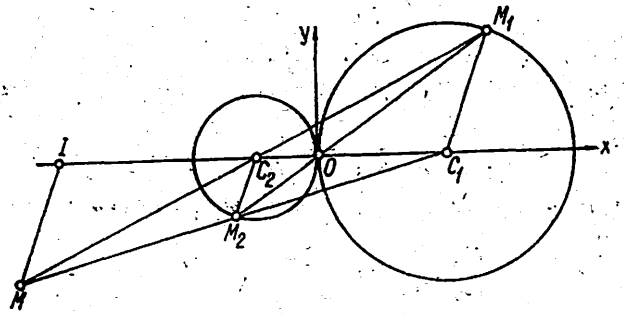


Fig. 68

Ecuațiile dreptelor M_1C_2 și M_2C_1 sînt respectiv

$$4\lambda\mu x - (4\mu + 1)y + 4\lambda\mu = 0,\ -\lambda\mu x + (\mu + 1)y + 2\lambda\mu = 0.$$

2. Locul geometric al punctului M de intersecție al celor două drepte se află eliminînd pe λ, μ între aceste două ecuații și

$$\frac{1}{1+\lambda^2} = \mu.$$

Înlocuind valorile lui λ și μ, calculate din primele două ecuații, în ultima relație, avem

$$x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0.$$

Locul geometric al punctului M este deci cercul care are drept centru punctul $(-4, 0)$ și raza 2.

Proprietatea aceasta se poate demonstra foarte frumos și pe cale geometrică. Într-adevăr, pe figură se vede că triunghiurile C_1OM_1, C_2OM_2 fiind isoscele, avem

$$\sphericalangle C_2M_2O = \sphericalangle C_2OM_2 = \sphericalangle C_1OM_1 = \sphericalangle C_1M_1O.$$

Unghiurile alterne interne C_2M_2O, C_1M_1O fiind egale, rezultă că razele C_2M_2, C_1M_1 sînt paralele.

Fie MI paralela dusă din M la razele C_2M_2, C_1M_1. Triunghiurile asemenea IMC_1, $C_2M_2C_1$ ne dau

$$\frac{IM}{C_2M_2} = \frac{IC_1}{C_2C_1}.$$

Triunghiurile asemenea IMC_2, $C_2M_1C_1$ ne dau

$$\frac{IM}{C_1M_1} = \frac{IC_2}{C_2C_1}.$$

Împărțind aceste relații membru cu membru, avem

$$\frac{C_1M_1}{C_2M_2} = \frac{IC_1}{IC_2}.$$

Ținînd seama că $C_1M_1 = 2$; $C_2M_2 = 1$, rezultă

$$\frac{IC_1}{IC_2} = 2 \quad \text{sau} \quad IC_1 = 2IC_2.$$

De aici deducem

$$IC_2 + C_2C_1 = 2IC_2, \; IC_2 = C_2C_1 = 3.$$

Deci triunghiurile asemenea IMC_2, $C_2C_1M_1$ sînt egale. Rezultă $IM = C_1M_1 = 2$.

În rezumat, punctul I este fix, căci $OI = OC_2 + C_2I = 4$, iar $MI = 2 =$ constant. Deci locul geometric al punctului M este cercul cu centrul I $(-4, 0)$ și raza 2.

Observație. Am văzut că: $\frac{IC_1}{IC_2} = 2 = -\frac{OC_1}{OC_2}$, deci punctele I și O sînt conjugate armonic față cu punctele C_1 și C_2. Punctul O fiind primul centru de asemănare al cercurilor date, rezultă că I este al doilea centru de asemănare. Prin I trec tangentele comune exterioare ale cercurilor.

3. Din (1) deducem $y = \pm\sqrt{4x - x^2}$, deci $y' = \pm\frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$.

Să însemnăm $z = \pm\frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$ și să studiem variația acestei funcții. Observăm că z avînd cîte două valori egale și de semne contrare pentru orice valoare a lui x, este de ajuns să considerăm, de exemplu, numai semnul plus, pentru ca prin simetrie față cu Ox să deducem întreaga curbă. Punctele de maxim și de minim de pe prima ramură vor deveni atunci puncte de minim și de maxim pe ramura simetrică.

Funcția z nu există decît dacă $4x - x^2 \geqslant 0$, deci dacă $0 \leqslant x \leqslant 4$, ceea ce era evident a priori, căci y-ul cercului (1) și deci y' nu există decît în aceste condiții.

Dreptele $x = 0$ (axa Oz) și $x = 4$ sînt asimptote. Curba taie axa Ox în punctul de abscisă $x = 2$. Derivata este

$$z' = -\frac{4}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}}$$

și nu se anulează niciodată (ceea ce știam căci cercul nu admite puncte de inflexiune), rămînînd tot timpul negativă, deci funcția este continuă descrescătoare și nu are puncte de maxim sau de minim.

Dacă luăm și derivata a doua $z'' = \frac{12(2-x)}{(4x-x^2)^2\sqrt{4x-x^2}}$, vedem că ea se anulează pentru $x = 2$, deci punctul de pe Ox al curbei este un punct de inflexiune al curbei. Tangenta în acest punct al curbei are coeficientul unghiular,

$$m = z'(2) = -\frac{4}{4\times 2} = -\frac{1}{2}.$$

Curba se construiește acum cu ușurință. Luînd și simetrica ei față de Oy (pe figură este punctată) obținem întreaga curbă (fig. 69).

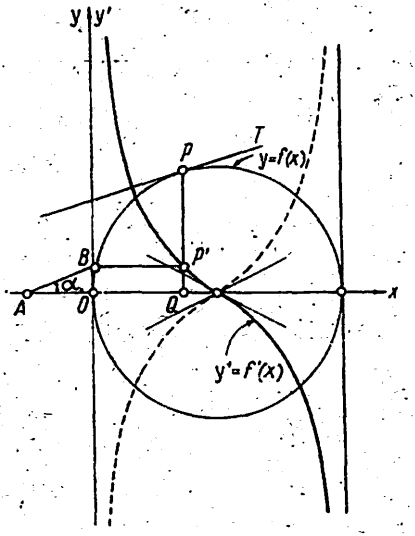


Fig. 69

Observație. Am figurat și cercul $y = f(x)$ și diagrama ecuației $y' = f'(x)$; a doua diagramă se deduce din prima printr-o construcție geometrică, numită *derivarea grafică*. În punctul curent P la diagrama $y = f(x)$ ducem tangenta PT; prin punctul $A(-1, 0)$ numit pol, ducem paralela AB la PT; fie B punctul ei de intersecție cu Oy; paralela dusă prin B la Ox taie paralela dusă prin P la Oy în P'; punctul P' se găsește pe diagrama $y' = f'(x)$. Într-adevăr, dacă α este unghiul tangentei PT cu Ox, avem din triunghiul AOB,

$$QP' = OB = AO \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha = y',$$

adică coordonatele lui P' sînt $OQ = x$ și $QP' = y'$.

Curba $y' = f'(x)$ poartă numele de curba derivată a curbei $y = f(x)$.

VI.14. *Se consideră axele rectangulare Ox, Oy și punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$.*

Să se scrie ecuația dreptei OC.

Să se calculeze unghiul dreptelor OC și AB și unghiul dreptelor AC și BC.

Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Să se scrie ecuația cercului AOB și să se cerceteze care este poziția punctului C față de acest cerc.

Soluție. Dreapta OC trecînd prin origine are ecuația de forma $y = mx$, în care coeficientul unghiular este dat de

$$m = \frac{\frac{2a^2b}{a^2+b^2} - 0}{\frac{2ab^2}{a^2+b^2} - 0} = \frac{a}{b},$$

deci ecuația dreptei OC este $y = \frac{ax}{b}$ sau $ax - by = 0$.

Cunoaștem coordonatele la origine a și b ale dreptei AB, deci ecuația ei este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, coeficientul ei unghiular

$$m' = -\frac{b}{a}.$$

Unghiul u format de dreptele OC și AB este dat de formula

$$\operatorname{tg} u = \frac{m' - m}{1 + mm'} = \frac{-\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{1 - 1} = \pm\infty,$$

deci $u = 90°$, adică dreptele sînt ortogonale.

Coeficienții unghiulari m_1 și m_2 ai dreptelor AC și BC sînt

$$m_1 = \frac{\frac{2a^2b}{a^2+b^2} - 0}{\frac{2ab^2}{a^2+b^2} - a} = \frac{2ab}{b^2 - a^2},$$

$$m_2 = \frac{\frac{2a^2b}{a^2+b^2} - b}{\frac{2ab^2}{a^2+b^2} - 0} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

Dreptele sînt perpendiculare pentru că condiția de ortogonalitate $1 + m_1m_2 = 0$ este îndeplinită.

Aria S a triunghiului ABC se calculează cu formula

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

în care

$$x_1 = a,\ y_1 = 0;\quad x_2 = 0,\ y_2 = b,\ x_3 = \frac{ab^2}{a^2+b^2},$$

$$y_3 = \frac{2a^2b}{a^2+b^2},$$

Făcînd înlocuirile și calculele, se găsește

$$\frac{S(a^2+b^2)}{ab} = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ b & a & \frac{a^2+b^2}{2ab} \end{vmatrix} = \frac{a^2+b^2}{2} - b^2 - a^2$$

de unde deducem $S = -\frac{ab}{2}$, iar în valoare absolută $S = \frac{ab}{2}$.

Dacă numerele a și b au același semn, am găsit pentru aria triunghiului ABC un număr negativ, ceea ce era de prevăzut pentru că perimetrul triunghiului este parcurs în sensul care lasă interiorul triunghiului la dreapta observatorului.

În cercul care trece prin punctele A, O, B, coarda AB este un diametru, pentru că unghiul AOB este drept; urmează că ecuația cercului este

$$(x-a)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0 \text{ sau } x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

Dar am văzut că $\sphericalangle ACB = 90°$, deci punctul C se găsește pe cercul de diametru AB, adică punctele O, A, B, C sînt conciclice.

Se poate verifica și direct că punctul C se găsește pe cercul care trece prin punctele O, A, B, adică ecuația

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

este identic verificată cînd înlocuim coordonatele curente x și y prin coordonatele punctului C,

$$x = \frac{2ab^2}{a^2+b^2},\quad y = \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$$

VI.15. *În sistemul de axe dreptunghiulare Oxy, se dau punctele fixe $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și punctul mobil $M(0, p)$. Fie P mijlocul segmentului AM; dreapta BP taie axa Ox în punctul N. Se cere:*

1. *Locul geometric al punctului de intersecție al dreptei OP cu paralela dusă din N la axa Oy.*
2. *Locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta MN și dreapta OP.*
3. *Ecuația cercului ce trece prin origine și este tangent în punctul A la dreapta AM.*
4. *Fie E al doilea punct unde acest cerc taie axa Oy. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al tangentei în origine la cercul precedent, cu paralela dusă din E la axa Ox.*

Soluție. 1. Punctul P are coordonatele $P\left(\frac{a}{2}, \frac{p}{2}\right)$; ecuația dreptei BP este

$$-\frac{y-b}{\frac{p}{2}-b}=\frac{x}{\frac{a}{2}} \quad \text{sau} \quad (p-2b)\,x-ay+ab=0.$$

Dreapta BP taie pe Ox în punctul N de coordonate $\frac{ab}{2b-p}$ și 0.

Dreapta OP are ecuația $ay = px$, iar paralela la Oy prin N, ecuația $x=\frac{ab}{2b-p}$; fie Q_1 punctul lor comun; coordonatele lui Q_1 sînt

$$x=\frac{ab}{2b-p}, \quad y=\frac{px}{a},$$

iar locul geometric descris de Q_1, cînd parametrul p variază, se obține prin eliminarea lui p dintre ultimele două ecuații. Se găsește

$$p=\frac{ay}{x}, \quad x=\frac{abx}{2bx-ay},$$

adică

$$2bx-ay-ab=0.$$

Ecuația fiind de gradul întîi în raport cu x și y, reprezintă o dreaptă D_1.

2. Pentru dreapta MN cunoaştem coordonatele ei la origine, ecuaţia este deci

$$\frac{x}{\frac{ab}{2b-p}} + \frac{y}{p} - 1 = 0$$

sau

$$(MN) \equiv p(2b-p)x + aby - abp = 0.$$

Dreptele MN şi OP se taie într-un punct Q_2, al cărui loc geometric se obţine prin eliminarea parametrului p între ecuaţiile $(MN) = 0$ şi $(OP) \equiv px - ay = 0$. Rezultatul eliminării este, înlocuind în prima ecuaţie pe p cu valoarea $\frac{ay}{x}$ scoasă din a doua,

$$ay\left(2b - \frac{ay}{x}\right) + aby - \frac{a^2by}{x} = 0$$

sau

$$3bx - ay - ab = 0.$$

Ecuaţia fiind de gradul întîi în raport cu x şi y, reprezintă o dreaptă D_2.

Dreptele D_1 şi D_2 se taie pe axa Oy în punctul $B'(0, -b)$ simetricul lui B în raport cu originea O.

3. Ecuaţia unui cerc care trece prin origine este

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0$$

în care (u, v) sînt coordonatele centrului. Cercul trece prin punctul $A(a, 0)$, deci coordonatele lui verifică ecuaţia cercului, adică

$$a^2 - 2ua = 0, \; 2u = a,$$

iar ecuaţia cercului devine

$$x^2 + y^2 - ax - 2vy = 0.$$

Pentru a exprima că cercul este tangent în A la dreapta AM, scriem că centrul $C\left(\frac{a}{2}, v\right)$ se găseşte pe perpendiculara AC ridicată în A pe AM.

Coeficientul unghiular al dreptei AM este egal cu $-\frac{p}{a}$; urmează că dreapta AC are coeficientul unghiular egal cu $\frac{a}{p}$.

Ecuația dreptei AC este deci

$$y - 0 = \frac{a}{p}(x - a) \quad \text{sau} \quad ax - py - a^2 = 0.$$

Scriem că centrul $C\left(\frac{a}{2}, v\right)$ se găsește pe această dreaptă, deci

$$\frac{a^2}{2} - pv - a^2 = 0, \quad 2v = -\frac{a^2}{p}.$$

Ecuația cercului devine

$$x^2 + y^2 - ax + a^2\frac{y}{p} = 0,$$

care se mai scrie

$$xx + yy - a\frac{x + x}{2} + a^2\frac{(y + y)}{2p} = 0$$

și din ultima formă deducem ecuația tangentei la cerc, în origine, prin dedublare,

$$x \times 0 + y \times 0 - a\frac{x + 0}{2} + a^2\frac{y + 0}{2p} = 0.$$

sau

$$px - ay = 0,$$

adică tangenta în origine la cerc este chiar dreapta OP.

Axa Oy taie cercul în două puncte O și E; ordonatele lor sînt date de ecuația $y^2 + a^2\frac{y}{p} = 0$ dedusă din ecuația cercului în care s-a făcut $x = 0$. Rădăcina $y = 0$ corespunde originii O, cealaltă rădăcină $y = -\frac{a^2}{p}$ corespunde punctului E, ale cărui coordonate sînt deci $E\left(0, -\frac{a^2}{p}\right)$.

Fie Q_3 punctul de intersecție al tangentei OP, de ecuație $px - ay = 0$, cu paralela dusă prin E la axa Ox, de ecuație $y = -\frac{a^2}{p}$. Coordonatele lui Q_3 se deduc din ultimele două ecuații și sînt

$$x = -\frac{a^2}{p}, \quad y = -\frac{a^2}{p}.$$

Locul geometric descris de punctul Q_3 se obține prin eliminarea parametrului p între ultimele două ecuații; rezultatul eliminării este $y^2 = -ax$ și reprezintă o parabolă, tangentă în origine la axa Oy, simetrică în raport cu axa Ox și situată la stînga lui Oy.

VI.16. *Se dă dreapta* $3x + 4y = 12$ *și punctul* C $(7,4)$; *se construiește triunghiul dreptunghi isoscel* ECD *cu unghiul drept în* C *și a cărui ipotenuză* ED *este situată pe dreapta dată.*

1. *Să se calculeze coordonatele vîrfurilor* E *și* D *ale triunghiului, precum și ale proiecției* F *a lui* D *pe axa* Oy (D *are ordonata negativă*).

2. *Să se arate că* FC *este bisectoarea unghiului* EFD.

3. *Să se arate că punctele* E, C, D, F *se află pe același cerc și să se scrie ecuația acestui cerc.*

4. *Cercul taie axa* Ox *în două puncte* E' *și* D' (D' *are abscisa pozitivă*); *să se arate că dreptele* EE' *și* DD' *sînt egale și paralele și că unghiurile* ECE' *și* DCD' *sînt egale.*

5. *Să se arate că* CE' *este îndoitul lui* CD'.

6. *Să se explice geometric rezultatele de la punctele* 2, 3, 4.

Soluție. 1. Dreapta dată are ecuația $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ și sub această formă citim că coordonatele ei la origine sînt 4 și 3, adică dreapta taie axele de coordonate în punctele $A(4,0)$ și $B(0,3)$. Dreapta AB are coeficientul unghiular egal cu $-\frac{3}{4}$, deci perpendiculara coborîtă din C pe AB are coeficientul unghiular egal cu $\frac{4}{3}$; ecuația acestei perpendiculare este deci

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 7) \text{ sau } 4x - 3y - 16 = 0;$$

ea taie dreapta AB în punctul ale cărui coordonate sînt rădăcinile sistemului

$$3x + 4y - 12 = 0, \quad 4x - 3y - 16 = 0,$$

adică $x = 4$, $y = 0$, deci proiecția punctului C pe dreapta AB este chiar punctul A.

Distanța AC dintre punctele $A(4,0)$ și $C(7,4)$ este egală cu 5; în triunghiul dreptunghic isoscel DCE, CA este înălțime și mediană, deci A este centrul cercului circumscris triunghiului DCE, adică vîrfurile D și E sînt punctele de intersecție ale

dreptei AB cu centrul în A şi raza $AC = 5$, iar ecuaţia cercului este

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0.$$

Coordonatele vîrfurilor D şi E sînt egale cu rădăcinile sistemului

$$3x + 4y - 12 = 0, \quad x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0.$$

Prin eliminarea lui y obţinem ecuaţia $25x^2 - 200x = 0$, ale cărei rădăcini 0 şi 8 sînt abscisele punctelor căutate; ordonatele lor le scoatem din ecuaţia dreptei, în care înlocuim pe x respectiv prin 0 şi 8 şi obţinem 3 şi -3, deci punctele de intersecţie dintre dreaptă şi cerc au coordonatele (0,3) şi (8,-3). Prin ipoteză punctul D are ordonata negativă, deci $D(8, -3)$, $E(0,3)$, adică punctul E coincide cu punctul B.

Punctul F fiind proiecţia lui D pe Oy, are abscisa egală cu zero, iar ordonata egală cu ordonata lui D, deci $F(0, -3)$.

Altă metodă pentru determinarea coordonatelor punctelor D şi E este următoarea: triunghiul dreptunghi DCE fiind isoscel, unghiurile lui ascuţite sînt egale cu 45°. Dreapta DE are coeficientul unghiular $-\frac{3}{4}$; fie m coeficientul unghiular al dreptei EC; deducem, tg 45° fiind egală cu 1,

$$\frac{m + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3m}{4}} = 1, \quad m = \frac{1}{7}.$$

Ecuaţia dreptei CE este

$$y - 4 = \frac{1}{7}(x - 7) \quad \text{sau} \quad x - 7y + 21 = 0,$$

ea taie dreapta AB, de ecuaţie $3x + 4y - 12 = 0$, în punctul E (0, 3).

Dreapta CD fiind perpendiculară pe CE are coeficientul unghiular egal cu -7, ecuaţia dreptei CD fiind

$$y - 4 = -7(x - 7) \quad \text{sau} \quad 7x + y - 53 = 0;$$

ea taie dreapta AB în punctul $D(8, -3)$.

2. Dreapta FC trece prin punctele F $(0, -3)$ şi $C(7, 4)$, ecuaţia ei este

$$y + 3 = (4 + 3)\frac{x}{7} \quad \text{sau} \quad x - y - 3 = 0,$$

are coeficientul unghiular egal cu 1, deci este paralelă cu bisectoarea unghiului xOy; urmează că face unghiuri egale cu dreptele FD și FE duse prin F, paralele cu Ox și Oy, adică FC este bisectoarea unghiului DFE.

3. Cercul circumscris triunghiului dreptunghi DCE este cercul de diametru DE; ecuația lui este

$$(x-8)(x-0)+(y+3)(y-3)=0 \quad \text{sau} \quad x^2+y^2-8x-9=0$$

și am regăsit ecuația stabilită la 1.

Coordonatele 0 și -3 ale punctului F verifică ecuația cercului, deci F se găsește pe cerc, ceea ce revine a spune că punctele D, C, E, F sînt situate pe același cerc.

4. Cercul taie axa Ox în punctele D' și E', ale căror abscise sînt rădăcinile ecuației (facem în ecuația cercului $y=0$)

$$x^2-8x-9=0, \quad x=-1 \quad \text{și} \quad x=9;$$

însă D' are abscisa pozitivă, deci $E'(-1,0)$, $D'(9,0)$.

Dreptele EE' și DD' au respectiv ecuațiile

$$y=3\frac{x+1}{1} \quad \text{și} \quad y=-3\frac{x-9}{8-9}$$

sau $y=3x+3$ și $y=3x-27$; ele au coeficienții unghiulari egali cu 3, deci sînt paralele.

Pătratele distanțelor EE' și DD' sînt respectiv egale cu

$$(-1-0)^2+(0-3)^2=10 \quad \text{și} \quad (9-8)^2+(0+3)^2=10,$$

deci distanțele EE' și DD' sînt egale.

Dreapta $E'C$ are coeficientul unghiular egal cu $m_1=\frac{4-0}{7+1}=\frac{1}{2}$, iar dreapta $D'C$, $m_2=\frac{4-0}{7-9}=-2$; deducem $1+m_1m_2=0$, adică dreptele sînt perpendiculare, ceea ce era de prevăzut pentru că ele sînt laturile unui unghi $D'CE'$ înscris într-un semicerc.

Am văzut că dreptele EC și DC au coeficienții unghiulari egali cu $\frac{1}{7}$ și -7; rezultă că tangentele unghiurilor ECE' și DCD' sînt respectiv egale cu

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2\times 7}}=\frac{1}{3} \quad \text{și} \quad \frac{-2+7}{1+2\times 7}=\frac{1}{3};$$

rezultă că unghiurile sînt egale.

5. Patratele distanţelor CE' şi CD' sînt egale respectiv cu $(7+1)^2+(4-0)^2=80=4\times 20$ şi $(7-9)^2+(4-0)^2=20$, de unde rezultă că $CE'=2CD'$.

6. Triunghiurile dreptunghice DCE şi DFE au ipotenuza DE comună, deci punctele D, C, E, F se găsesc pe cercul de diametru DE; însă triunghiul dreptunghi DCE este isoscel, deci arcele de cerc DC şi CE sînt egale, de unde rezultă că unghiurile EFC şi DFC subîntind arce egale, deci FC este bisectoarea unghiului DFE.

Coarda $D'E'$ trece prin centrul A al cercului, deci este un diametru şi unghiul $D'CE'$ este drept; dacă din unghiurile drepte DCE şi $D'CE'$ scădem unghiul DCE, rămîn unghiurile egale DCD' şi ECE'.

Diametrii DE şi $D'E'$ determină pe cerc arcele egale DD' şi EE', care subîntind coardele paralele şi egale DD' şi EE'.

VI.17. *Se dă triunghiul format de dreptele AB, BC, CA, de ecuaţii*

$$y-2x+1=0,\quad y+x-5=0,\quad 4y+x-5=0.$$

1. *Să se calculeze coordonatele vîrfurilor A, B, C ale triunghiului, ecuaţia cercului circumscris acestui triunghi şi coordonatele punctului M în care înălţimea coborîtă din B pe AC taie acest cerc.*

2. *Să se calculeze coordonatele proiecţiilor A', B', C' ale lui M respectiv pe BC, CA, AB.*

3. *Să se verifice că A', B', C' sînt coliniare.*

4. *Fie A'', B'', C'' simetricele lui M respectiv faţă de dreptele BC, CA, AB; să se calculeze coordonatele lui A'', B'', C'' şi aria triunghiului $A''B''C''$.*

5. *Să se explice geometric rezultatele de la 3 şi 4.*

Soluţie. 1. Vîrful A se găseşte la intersecţia dreptelor

$$y-2x+1=0,\quad 4y+x-5=0.$$

Acest sistem de două ecuaţii cu două necunoscute x şi y are rădăcinile $x=y=1$, deci coordonatele vîrfului A sînt $A(1,1)$.

Sistemul $y-2x+1=0$, $y+x-5=0$ are rădăcinile $x=2$, $y=3$, deci $B(2,3)$.

Sistemul $y+x-5=0$, $4y+x-5=0$ are rădăcinile $x=5$, $y=0$, deci $C(5,0)$.

Ecuația cercului ABC este

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 2 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 2 & 0 \\ 23 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 11 & 1 & 2 \\ 23 & 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 2 \\ 23 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-9(x^2+y^2)+57x+21y-60=0$$

sau

$$3(x^2+y^2)-19x-7x+20=0.$$

Dreapta AC, de ecuație $4y+x-5=0$ are coeficientul unghiular egal cu $-\frac{1}{4}$; urmează că perpendiculara BM pe ea va avea coeficientul unghiular egal cu $+4$; ecuația dreptei BM este deci $y-3=4(x-2)$ și această dreaptă taie cercul ABC în punctele B și M, ale căror coordonate sînt rădăcinile sistemului,

$$y-3=4(x-2), \quad 3(x^2+y^2)-19x-7y+20=0.$$

Prin eliminarea lui y se găsește ecuația $51x^2-167x+130=0$, ale cărei rădăcini sînt $x_1=2$, $x_2=\frac{65}{51}$, însă 2 este abscisa lui B; rezultă că abscisa lui M este $\frac{65}{51}$, iar ordonata lui M va fi $y=3+4\left(\frac{65}{51}-2\right)=\frac{5}{51}$, deci $M\left(\frac{65}{51}, \frac{5}{51}\right)$.

2. Punctul A' se găsește la intersecția dreptei BC, de ecuație $y+x-5=0$ și coeficientul unghiular -1, cu perpendiculara MA' coborîtă din M pe BC; MA are deci coeficientul unghiular egal cu $+1$, iar ecuația ei este $y-\frac{5}{51}=x-\frac{65}{51}$. Din ultimele două ecuații deducem coordonatele lui $A'\left(\frac{105}{34}, \frac{65}{34}\right)$.

Același raționament arată că B' se găsește la intersecția dreptelor ortogonale $4y + x - 5 = 0$, $y - \frac{5}{51} = 4\left(x - \frac{65}{51}\right)$ de unde deducem coordonatele lui $B'\left(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}\right)$.

În fine, C' se găsește la intersecția dreptelor ortogonale

$$y - 2x + 1 = 0,\ y - \frac{5}{51} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{65}{51}\right),$$

de unde deducem coordonatele lui $C'\left(\frac{59}{85}, \frac{33}{85}\right)$.

3. Dublul ariei triunghiului $A'B'C'$ este egal cu

$$\begin{vmatrix} \frac{105}{34} & \frac{65}{34} & 1 \\ \frac{25}{17} & \frac{15}{17} & 1 \\ \frac{59}{85} & \frac{33}{85} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 525 & 325 & 1 \\ 250 & 150 & 1 \\ 118 & 66 & 1 \end{vmatrix}}{170^2}$$

Am trecut de la primul determinant la al doilea, prin înmulțirea primelor două coloane cu 170, numitorul comun al numerelor fracționare; în ultimul determinant scădem linia a doua din prima și a treia din a doua, și avem

$$\begin{vmatrix} 275 & 175 & 0 \\ 132 & 84 & 0 \\ 118 & 66 & 1 \end{vmatrix} = 25 \times 12 \times \begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 11 & 7 & 0 \\ 18 & 66 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aria triunghiului $A'B'C'$ fiind nulă, punctele A', B', C' sînt coliniare.

4. Fie $M(x_0, y_0)$, $A'(x', y')$, $A''(x'', y'')$; A'' fiind simetricul lui M în raport cu A', avem $\frac{A''M}{A''A'} = 2$ și dacă notăm acest raport cu $-\lambda$, deducem $\lambda = -2$, iar coordonatele lui A'' sînt date de formulele

$$(A'')\ x'' = \frac{x_0 + \lambda x'}{1 + \lambda} = -(x_0 - 2x') = 2x' - x_0 = \frac{105}{17} - \frac{65}{51} = \frac{250}{51},$$

$$y'' = \frac{y_0 + \lambda y'}{1 + \lambda} = -(y_0 - 2y') = 2y' - y_0 = \frac{65}{17} - \frac{5}{51} = \frac{190}{51}.$$

Același raționament arată că B'' este simetricul lui M în raport cu B', iar C'' simetricul lui M în raport cu C'' deci coordonatele punctelor B'' și C'' sînt respectiv

$$(B''); x'' = \frac{50}{17} - \frac{65}{51} = \frac{5}{3}, \quad y'' = \frac{30}{17} - \frac{5}{51} = \frac{5}{3},$$

$$(C''); x'' = \frac{118}{85} - \frac{65}{51} = \frac{29}{255}, \quad y'' = \frac{66}{85} - \frac{5}{51} = \frac{173}{255}.$$

Dublul ariei triunghiului $A''B''C''$ este egal cu

$$\begin{vmatrix} \frac{250}{51} & \frac{190}{51} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ \frac{29}{255} & \frac{173}{255} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 1250 & 950 & 1 \\ 425 & 425 & 1 \\ 29 & 173 & 1 \end{vmatrix}}{255^2},$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 825 & 525 & 0 \\ 396 & 252 & 0 \\ 29 & 173 & 1 \end{vmatrix}}{255^2} = 75 \times 36 \times \frac{\begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 11 & 7 & 0 \\ 29 & 173 & 1 \end{vmatrix}}{255^2} = 0$$

Aria triunghiului $A''B''C''$ fiind nulă, punctele A'', B'', C'' sînt coliniare.

5. Punctele A', B', C' se găsesc pe *dreapta lui Simson* corespunzătoare punctului M, deci ele sînt evident coliniare[1]).

Punctele A'', B'', C'' sînt omoteticele punctelor A', B', C' în omoteția de centru M și raport 2, deci ele sînt evident coliniare pentru că se găsesc pe dreapta omotetică a dreptei $A'B'C'$.

Mai observăm că B'' este ortocentrul triunghiului ABC, pentru că simetricele ortocentrului, în raport cu laturile, sînt trei puncte situate pe cercul circumscris. Pentru verificarea analitică, vedem că B'' se găsește pe înălțimea BB', deci va fi suficient să arătăm că dreapta AB'' este înălțime, adică perpendiculară pe latura BC. Însă dreapta BC are coeficientul

[1]) Vezi Geometria triunghiului de Traian Lalescu, p. 19.

unghiular -1, iar dreapta AB'', coeficientul unghiular

$$\frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{5}{3}-1}=1$$

și $(-1)\times 1+1=0$; verificarea este făcută.

Se mai știe că *dreptele Simson* ale picioarelor L, M, N, ale înălțimilor pe cercul ABC sînt paralele respectiv cu tangentele în A, B, C la cercul circumscris. Urmează că *dreapta Simson* a punctului M, adică dreapta $A'B'C'$, este paralelă cu tangenta în B la cerc. Pentru verificarea analitică observăm că dreapta $A'B'C'$ are coeficientul unghiular egal cu

$$\frac{\frac{15}{17}-\frac{33}{85}}{\frac{27}{17}-\frac{59}{85}}=\frac{75-33}{125-59}=\frac{7}{11},$$

iar ecuația tangentei în $B(2, 3)$ la cerc se deduce din ecuația cercului prin dedublare și este

$$6\times 2x+6\times 3y-19(x+2)-7(y+3)+40=0$$

sau

$$-7x+11y-19=0$$

și coeficientul ei unghiular este egal cu $\frac{7}{11}$; dreptele, avînd coeficienții unghiulari egali cu $\frac{7}{11}$, sînt paralele și verificarea este făcută.

VI.18. *Fie punctele* $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$.

1. *Să se afle coordonatele punctului* C, *situat deasupra axei* Ox, *astfel ca triunghiul* ABC *să fie echilateral.*

2. *Se duce perpendiculara pe mijlocul* K *al lui* BC; *ea taie bisectoarea primului cadran în* Q *și bisectoarea celui de al doilea cadran în* P. *Să se arate că figura* $BQCP$ *este un pătrat.*

3. *Să se calculeze aria acestui pătrat.*

4. *Să se arate că punctele* B, Q, C, P *sînt situate pe un același cerc.*

Soluție. 1. Punctele A, B, avînd ordonatele egale cu zero, se găsesc pe axa Ox și avînd abscisele egale și de semne con-

trarii, sînt simetrice în raport cu originea O. Vîrful C se găsește pe mediatoarea laturii AB, pentru că triunghiul ABC este echilateral, adică pe Oy, și fiind situat deasupra lui Ox, are ordonata pozitivă. Triunghiul ABC fiind echilateral, unghiurile lui sînt egale cu 60°, în particular $B = 60°$.

În triunghiul dreptunghi BOC, $OC = OB \operatorname{tg} B$,

$$OC = a \operatorname{tg} 60° = a\sqrt{3},$$

deci coordonatele lui C sînt $C(0, a\sqrt{3})$.

2. Punctul K, mijlocul lui BC, are coordonatele egale cu

$$\frac{a+0}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{și} \quad \frac{0+a\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dreapta BC are coeficientul unghiular egal cu

$$\frac{a\sqrt{3}-0}{0-a} = -\sqrt{3},$$

iar perpendiculara KQ pe ea, coeficientul unghiular $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dreapta KQ are deci ecuația

$$y - a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right). \tag{1}$$

Bisectoarea OQ are ecuația $y = x$, iar bisectoarea OP are ecuația $y = -x$; aceste două bisectoare au ecuațiile de forma $y = mx$, unde $m = \pm 1$.

Fie M punctul de intersecție al dreptei (1) cu dreapta (2) $y = mx$; coordonatele lui M sînt egale cu rădăcinile sistemului (1), (2), de unde deducem

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3m-\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{ma\sqrt{3}}{3m-\sqrt{3}}.$$

Pentru $m = 1$ deducem coordonatele punctului Q,

$$Q\left(a\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad a\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

Pentru $m = -1$, deducem coordonatele punctului P,

$$P\left(-a\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad a\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

Mijlocul segmentului PQ are coordonatele egale cu mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor P şi Q, adică $\frac{a}{2}$ şi $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, care sînt coordonatele punctului K.

În fine, să calculăm lungimile segmentelor BC şi PQ.

$$BC^2 = (0-a)^2 + (a\sqrt{3}-0)^2 = 4a^2,$$

$$PQ^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}+1}{2} + a\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}+1}{2} - a\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 4a^2,$$

deci $BC = PQ = 2a$, $KB = KC = KP = KQ = a$.

Segmentele BC şi PQ fiind egale, perpendiculare şi concurente în mijloacele lor, sînt diagonalele unui pătrat, adică patrulaterul $BQCP$ este un pătrat, ceea ce trebuia demonstrat.

3. Latura BQ a pătratului se calculează din triunghiul dreptunghi BKQ,

$$BQ^2 = KB^2 + KQ^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \quad BQ = a\sqrt{2}.$$

Aria pătratului este egală cu $BQ^2 = 2a^2$.

4. Punctele B, Q, C, P, vîrfurile pătratului, sînt evident situate pe un cerc şi anume pe cercul cu centrul K al pătratului şi raza $KB = a$; ecuaţia acestui cerc se poate obţine scriind că el este locul geometric al punctelor (x, y) de unde diametrul BC se vede sub un unghi drept,

$$(x-a)(x-0) + (y-0)(y-a\sqrt{3}) = 0$$

sau

$$x^2 + y^2 - ax - a\sqrt{3}y = 0$$

şi ecuaţia este verificată de coordonatele originii, deci cercul trece şi prin originea O, ceea ce se vede pe figură pentru că unghiul BOC este drept.

VI.19. 1. *Să se scrie ecuaţia cercului din cadranul întîi, de centru C, tangent în punctul $A(1,0)$ la axa Ox şi tangent la bisectoarea primului cadran. Care este raza acestui cerc?*

2. *Să se afle raza şi ecuaţia cercului cu centrul K, de abscisă $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, aşa fel ca axa sa radicală faţă de cercul 1 să fie chiar axa Oy.*

3. *Să se afle ecuația cercului de rază* 1, *cu centrul S pe axa Oy și sub axa Ox, astfel ca centrul radical al cercurilor* 1, 2, 3 *să fie chiar originea.*

4. *Să se calculeze aria triunghiului CKS.*

5. *Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului CKS.*

Soluție. 1. Fie punctul de contact al cercului cu bisectoarea OB a primului cadran; însă tangentele OA și OB duse din O la cercul C sînt egale, deci $OB = OA = 1$. Coordonatele lui B sînt egale cu proiecțiile pe axe ale vectorului OB, adică

$$1 \times \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{și} \quad 1 \times \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ecuația cercului C poate fi obținută prin mai multe metode, de exemplu putem porni de la ecuația generală a cercului

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

în care a,b sînt coordonatele centrului, iar r raza cercului.

Prin ipoteză cercul este tangent la axa Ox în punctul $A(1,0)$, adică dreapta $y = 0$ taie cercul în două puncte confundate cu A, deci ecuația

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

dedusă din ecuația cercului în care s-a făcut $y = 0$, admite rădăcina dublă $x = 1$, de unde

$$1 - 2a + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad \text{și} \quad 2 - 2a = 0,$$

ultima ecuație fiind obținută scriind că ecuația derivată $2x - 2a = 0$ admite rădăcina simplă $x = 1$.

Prin ipoteză cercul este tangent la bisectoarea OB, deci dreapta $y - x = 0$ taie cercul în două puncte confundate; abscisele punctelor de intersecție sînt date de ecuația

$$2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

dedusă din ecuația cercului în care s-a făcut $y = x$; pentru ca punctele de intersecție să fie confundate, trebuie ca discriminantul ultimei ecuații să fie egal cu zero, de unde deducem condiția

$$(a + b)^2 - 2(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

În total avem trei ecuații pentru a determina trei necunoscute a, b, r; din a doua ecuație deducem $a = 1$, din prima

deducem $a^2 + b^2 - r^2 = 1$, iar din a treia deducem $(a+b)^2 = 2$ sau $b = -1 \pm \sqrt{2}$. Însă cercul C fiind situat în primul cadran, centrul lui are ordonata pozitivă, deci $b = -1 + \sqrt{2}$. În fine $r = b = -1 + \sqrt{2}$.

Făcînd înlocuirile, ecuaţia cercului C este

$$x^2 + y^2 - 2x - 2(-1 + \sqrt{2})y + 1 = 0.$$

A doua metodă pentru determinarea cercului C este următoarea: centrul C se găseşte pe paralela dusă prin A la Oy şi pe bisectoarea unghiului AOB, deci triunghiul OAC este dreptunghi în A şi $\sphericalangle AOC = 22°30'$; deducem

$$AC = QA \operatorname{tg} 22°30' = 1 \times \operatorname{tg} 22°30' = -1 + \sqrt{2},$$

deci coordonatele centrului C sînt $OA = 1$ şi $AC = -1 + \sqrt{2}$, iar raza cercului egală cu AC (fig. 70).

A treia metodă: fie ecuaţia cercului C scrisă sub forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a = 0.$$

Puterea originii faţă de cerc este $OA^2 = 1$, deci $a = 1$; dreapta AB, a cărei ecuaţie este $y + (1 + \sqrt{2})(x - 1) = 0$, reprezintă polara originii faţă de care ecuaţia polară este $-ax - by + c = 0$ şi scriind că ultimele două ecuaţii au coeficienţii proporţionali, deducem valorile lui a şi b.

A patra metodă: ecuaţia conicelor bitangente dreptelor OA şi OB în punctele lor de intersecţie cu dreapta AB este

$$D_1 D_2 + \lambda \Delta^2 = 0,$$

în care $D_1 = 0$ este ecuaţia dreptei OA, adică $y = 0$; $D_2 = 0$ este ecuaţia dreptei OB, adică $y - x = 0$; $\Delta = 0$ este ecuaţia dreptei AB, adică $y + (1 + \sqrt{2})(x - 1) = 0$. Ecuaţia cercului este de forma

$$y(y - x) + \lambda [y + (1 + \sqrt{2})(x - 1)]^2 = 0$$

în care parametrul λ se determină prin condiţiile ca această conică să reprezinte un cerc, adică: coeficientul lui xy este nul, iar coeficienţii lui x^2 şi y^2 sînt egali. Aceste două condiţii sînt compatibile, ele determină valoarea numerică a lui λ şi deci ecuaţia cercului.

2. Linia centrelor CK este perpendiculară pe axa radicală Oy, deci centrele C şi K au ordonatele egale; rezultă că coor-

donatele centrului K sînt $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ şi $(-1+\sqrt{2})$. Ecuaţia cercului K este de forma

$$x^2+y^2+(1+\sqrt{2})\,x-2\,(-1+\sqrt{2})y+k=0.$$

Axa radicală a cercurilor C şi K are ecuaţia

$$-2x+1=(1+\sqrt{2})\,x+k$$

şi ea coincide cu axa Oy cînd parametrul $k=1$. Raza R a cercului K este dată de relaţia

$$\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}+(-1+\sqrt{2})^2-$$

$$-R^2=1,\quad R=\frac{3-\sqrt{2}}{2}.$$

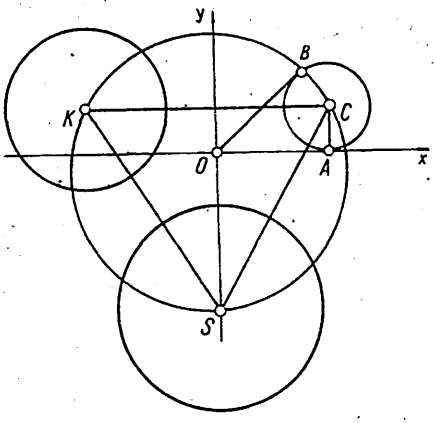


Fig. 70

3. Coordonatele centrului S sînt 0 şi $-s$, unde $s>0$; ecuaţia cercului S, a cărui rază este egală cu 1, este

$$x^2+y^2+2sy+s^2-1=0.$$

Prin ipoteză, centrul radical al cercurilor C, K, S este originea O, deci originea O are puteri egale faţă de aceste trei cercuri, de unde deducem

$$1=1=z^2-1\quad\text{sau}\quad z=\sqrt{2},$$

iar ecuaţia cercului S devine

$$x^2+y^2+2\sqrt{2}y+1=0.$$

4. Triunghiul CKS are baza $CK=1+\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, iar înălţimea $\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})$; aria triunghiului este deci egală cu $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$.

5. Ecuaţia cercului T circumscris triunghiului CKS este

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

în care centrul $T(\alpha,\beta)$ se află la intersecţia mediatoarelor tri-

unghiului; însă latura CK fiind paralelă la Ox, mediatoarea corespunzătoare ei este paralelă la Oy, deci abscisa α a centrului este egală cu media aritmetică a absciselor punctelor C şi K, adică

$$2\alpha = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \qquad \alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{4}.$$

Ordonata β a centrului T se determină prin condiţia $TC = TS$, adică

$$(\alpha-1)^2 + (\beta+1-\sqrt{2})^2 = (\alpha-0)^2 + (\beta+\sqrt{2})^2$$

de unde deducem

$$\beta = \frac{3(-3+\sqrt{2})}{28}.$$

Raza ρ a cercului T este egală, de exemplu, cu TS, deci

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2, \quad \gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 - (\beta+\sqrt{2})^2,$$

$$\gamma = \frac{-34+9\sqrt{2}}{14}.$$

Ecuaţia cercului T devine, după ce înlocuim α, β, γ cu valorile numerice găsite,

$$14(x^2+y^2) + 7(-1+\sqrt{2})x + 3(3-\sqrt{2})y - 34 + 9\sqrt{2} = 0.$$

Pentru controlul calculului se arată uşor că această ecuaţie este verificată de coordonatele punctelor C, K, S.

În fine, se poate verifica că cercul trigonometric, adică cercul cu centrul în origine şi cu raza egală cu unitatea, este cercul ortotomic al cercurilor C, K, S, adică cercul care le taie sub un unghi drept.

VI.20. *Intr-un sistem de axe dreptunghiulare Ox, Oy se consideră punctele mobile $M(2\lambda, 0)$, $N(0, \lambda)$, $P(0, 2\lambda)$ şi se cere:*

1. *Să se scrie ecuaţia cercului ce trece prin origine şi prin punctele M şi N.*

2. *Acest cerc taie dreapta MP într-un punct Q, al cărui loc geometric se cere.*

3. *Să se afle apoi locul geometric al intersecţiei tangentei în Q la cerc cu dreapta MN.*

4. *Se uneşte punctul M cu un punct fix A situat pe bisectoarea a doua a axelor; să se afle locul geometric al inter-*

secției dreptei AM cu paralela dusă din P la axa Ox și să se construiască acest loc (fig. 71).

Soluție. 1. Unghiul MON fiind drept, MN este un diametru al cercului; însă ecuația cercului construit pe segmentul MN ca diametru este

$$(x-2\lambda)(x-0)+(y-0)(y-\lambda)=0.$$

sau dezvoltînd și grupînd termenii asemenea,

$$x^2+y^2-2\lambda x-\lambda y=0.$$

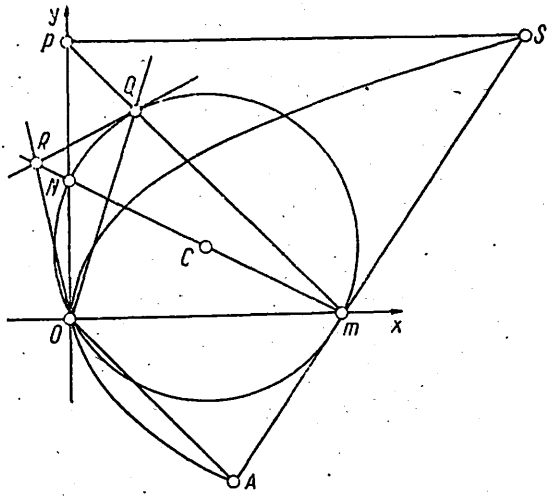


Fig. 71

Această ecuație reprezintă într-adevăr un cerc care trece prin origine și are centrul $C\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$ în mijlocul segmentului MN.

2. Ecuația dreptei MP este $\frac{x}{2\lambda}+\frac{y}{2\lambda}-1=0$ sau

$$x+y-2\lambda=0. \qquad (MP)$$

Dreapta MP taie cercul C în punctele M și Q; ecuația ordonatelor acestor două puncte se obține eliminînd pe x între ecuația cercului și ecuația dreptei; deducem din ecuația dreptei $x=-y+2\lambda$ și această valoare o introducem în ecuația

cercului care devine, după simplificări, $2y^2 - 3\lambda y = 0$, de unde deducem pentru y valorile $y = 0$ şi $y = \frac{3\lambda}{2}$, la care corespund pentru x valorile $x = 2\lambda$ şi $x = \frac{\lambda}{2}$, adică punctele $M(2\lambda, 0)$ şi $Q\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right)$. Coordonatele punctului Q sînt deci

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{3\lambda}{2}, \tag{Q}$$

şi cînd parametrul λ variază, punctul Q descrie locul geometric căutat, care este o dreaptă, pentru că coordonatele x, y sînt funcţii liniare de parametrul λ. Pentru a găsi ecuaţia carteziană a dreptei, eliminăm parametrul λ şi găsim $y = 3x$, o dreaptă care trece prin origine.

3. Fie QR tangenta în Q la cerc; ecuaţia ei se obţine din ecuaţia cercului prin dedublare,

$$\frac{x\lambda}{2} + \frac{y3\lambda}{2} - \lambda\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda\left(y + \frac{3\lambda}{2}\right)}{2} = 0$$

sau, după simplificări,

$$2x - 4y + 5\lambda = 0. \tag{QR}$$

Ecuaţia dreptei MN este $\frac{x}{2\lambda} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0$ sau

$$x + 2y - 2\lambda = 0. \tag{MN}$$

Dreapta MN şi tangenta QR se taie în punctul R, ale cărui coordonate x şi y se obţin rezolvînd sistemul format de ultimele două ecuaţii; obţinem

$$x = -\frac{\lambda}{4}, \quad y = \frac{9\lambda}{8}; \tag{R}$$

coordonatele x şi y fiind funcţii liniare de parametrul λ, punctul R descrie, cînd parametrul λ variază, o dreaptă.

Dacă eliminăm parametrul λ între ultimele două ecuaţii, sau direct între ecuaţiile dreptelor QR şi MN, obţinem $9x + 2y = 0$; aceasta este ecuaţia carteziană a locului geometric descris de punctul R, o dreaptă care trece prin origine.

4. Bisectoarea a doua a axelor de coordonate are ecuaţia $y+x=0$; un punct θ situat pe ea are deci coordonatele $A(a, -a)$. Dreapta AM este o dreaptă care trece prin două puncte A şi M, ecuaţia este deci

$$y + a = \frac{(x - a)(-a - 0)}{a - 2\lambda}$$

sau

$$ax + (a - 2\lambda)\, y - 2a\lambda = 0. \qquad (AM)$$

Fie PS paralela dusă prin P la Ox; ecuaţia ei este $y = 2\lambda$; fie S punctul de intersecţie al dreptelor AM şi PS; coordonatele lui S se află rezolvînd sistemul format de ecuaţiile acestor două drepte. Obţinem

$$x = \frac{4\lambda^2}{a}, \quad y = 2\lambda \qquad (S)$$

şi cînd parametrul λ variază, punctul S descrie o curbă a cărei ecuaţie carteziană se obţine prin eliminarea parametrului λ; rezultatul eliminării este

$$y^2 - ax = 0$$

şi ecuaţia reprezintă o parabolă tangentă în origine la Oy, axa ei de simetrie fiind Ox; parabola trece prin punctul $A(a, -a)$.

VI.21. *Un cerc de centru I, trecînd prin originea O a axelor de coordonate rectangulare Ox, Oy, taie axele respective în punctele A şi B.*

1. *Să se scrie ecuaţia cercului J cu centrul pe Ox, trecînd prin B şi tăind ortogonal cercul I, şi ecuaţia cercului K cu centrul pe Oy, trecînd prin A şi ortogonal cercului I.*

2. *Să se determine locul geometric al centrului radical al acestor trei cercuri, cînd dreapta AB se roteşte în jurul punctului B (facultativ, cînd dreapta AB se roteşte în jurul unui punct oarecare).*

Soluţie. 1. Dacă însemnăm prin $P(x, y)$ punctul curent pe cerc, prin $A(2a, 0)$ şi $B(0, 2b)$ punctele cercului situate pe Ox şi Oy respectiv, unghiul AOB este drept, deci AB este diametru al cercului, deci şi unghiul APB este drept (fig. 72); însă condiţia de ortogonalitate a dreptelor, date prin proiecţiile lor pe axe,

$$AP\,(x - 2a, \quad y - 0)$$

şi

$$BP\,(x-0,\quad y-2b)$$

este

$$(x-2a)\,(x-0)+(y-0)\,(y-2b)=0$$

sau

$$x^2+y^2-2ax-2by=0\,; \qquad (I)$$

aceasta este ecuaţia cercului I, al cărui centru $I(a,\ b)$ este mijlocul segmentului AB.

Fie $C(2c,\ 0)$ centrul cercului J; cercurile I şi J fiind ortogonale, razele

$$BI\,(a-0,\quad b-2b)$$

şi

$$BC\,(2c-0,\quad 0-2b)$$

sînt ortogonale, deci

$$(a-0)\,(2c-0)+(b-2b)\,(0-2b)=0$$

sau

$$ac+b^2=0 \qquad (1)$$

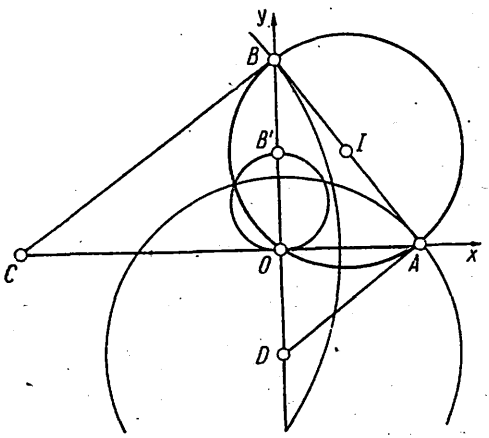


Fig. 72

Fie $D(0,\ 2d)$ centrul cercului K; cercurile I şi K fiind ortogonale, razele

$$AI\,(a-2a,\quad b-0)$$

şi

$$AD\,(0-2a,\quad 2d-0)$$

sînt ortogonale, deci

$$(a-2a)(0-2a)+(b-0)(2d-0)=0$$

sau

$$a^2+bd=0 \qquad (2)$$

Cercul J are centrul în C şi raza CB, ecuaţia lui este

$$(x-2c)^2+(y-0)^2=4c^2+4b^2$$

sau

$$x^2+y^2-4cx-4b^2=0$$

şi dacă înlocuim pe c cu valoarea scoasă din (1),

$$x^2+y^2+4b^2\frac{x}{a}-4b^2=0. \qquad (J)$$

Cercul K are centrul în D şi raza DA; ecuaţia lui este

$$(x-0)^2+(y-2d)^2=4d^2+4a^2$$

sau

$$x^2+y^2-4dy-4a^2=0$$

şi dacă înlocuim pe d cu valoarea scoasă din (2),

$$x^2+y^2+4a^2\frac{y}{b}-4a^2=0. \qquad (K)$$

După cum era de prevăzut, ecuaţia cercului (K) se deduce din ecuaţia cercului (J) permutînd pe x cu y şi pe a cu b.

2. Ecuaţia axei radicale a cercurilor (I) şi (J) se deduce din ecuaţiile cercurilor prin scădere membru cu membru; obţinem după suprimarea factorului 2,

$$2b^2\frac{x}{a}-2b^2+ax+by=0. \qquad (3)$$

Ecuaţia axei radicale a cercurilor (I) şi (K) se deduce din ecuaţiile cercurilor prin scădere membru cu membru; obţinem după suprimarea factorului 2,

$$2a^2\frac{y}{b}-2a^2+by+ax=0. \qquad (4)$$

Axele radicale (3) şi (4) se taie în centrul radical M al cercurilor (I), (J), (K); coordonatele x şi y ale lui M se obţin rezolvînd sistemul format de ecuaţiile (3) şi (4); se obţine

$$M\left[x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right]. \tag{5}$$

Dacă dreapta AB se roteşte în jurul lui B, urmează că b rămîne constant, iar a este variabil; locul geometric descris de centrul radical M se obţine eliminînd parametrul a între cele două ecuaţii (5), se obţine

$$x^2 + y^2 - by = 0,$$

adică cercul de diametru OB', unde B' $(0, b)$ este mijlocul segmentului OB.

Ecuaţia dreptei AB este

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0.$$

Prin ipoteză, ea trece printr-un punct fix al planului şi fie G $(2e, 2f)$ punctul fix; urmează că coordonatele punctului verifică ecuaţia dreptei, deci

$$\frac{e}{a} + \frac{f}{b} - 1 = 0, \tag{6}$$

şi în această ecuaţie a şi b sînt parametrii variabili, iar e şi f două constante.

Locul geometric descris de centrul radical M, în această ipoteză, se obţine eliminînd parametrii a şi b între cele trei ecuaţii (5) şi (6); din ecuaţiile (5) deducem

$$a = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad b = \frac{x^2 + y^2}{y} \tag{7}$$

şi aceste valori introduse în ecuaţia (6) conduc la ecuaţia

$$x^2 + y^2 - ax - fy = 0,$$

care reprezintă cercul de diametru OG', unde $G'(e, f)$ este mijlocul segmentului OG; acesta este locul geometric descris de centrul radical M.

Ca exercițiu propunem să se determine locul geometric descris de centrul radical M, cînd dreapta AB rămîne tangentă la un cerc cu centrul în originea O.

Se va scrie că distanța de la O la dreapta AB este constantă și egală cu raza R a cercului; se obține o relație între a și b, se înlocuiesc a și b prin valorile deduse din (5); locul geometric este cercul cu centrul în O și raza $\frac{R}{2}$.

TABLA DE MATERII

	Pag.
I. Geometrie plană	3
II. Geometrie în spaţiu	74
III. Algebră elementară	148
V. Trigonometrie	291
VI. Geometrie analitică	378

Responsabil de carte: Neicov V.
Tehnoredactor: Horowitz S.

Dat la cules 05.10.58. Bun de tipar 18.12.58. Hîrtie semivelină de 65 g./m². 61×86/16. Coli editoriale 21,67 Coli de tipar 27 Comanda U.V. 4337. A 06463. E 17325. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 512/514+516 (076). Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 512

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Nr.3, B-dul 6 Martie nr. 29, București, R.P.R.